Ιόνιο Πανεπιστήμιο - Τμήμα Πληροφορικής

Μαθηματικός Λογισμός

Ενότητα: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Παναγιώτης Βλάμος

´

Αδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Ιόνιο Πανεπιστήμιο»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1. ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ

Α. Είδη Συναρτήσεων

1. **Πραγματικές συναρτήσεις** πραγματικής μεταβλητής : $f : IR \to IR$.

2. **Διανυσματικές συναρτήσεις** $\vec{f} : IR \to IR^k$, οι οποίες αναλύονται ως $\vec{f}(x) = \left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\right)$ στις συντεταγμένες συναρτήσεις, που είναι πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής.

3. **Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών** $f : IR^n \to IR$, οι οποίες αναλύονται ως $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

4. **Διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών** $\vec{f} : IR^n \to IR^k$, οι οποίες αναλύονται ως $\vec{f}(x) = \left(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_k(\vec{x})\right)$ στις συντεταγμένες συναρτήσεις, που είναι συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Είναι προφανές ότι αρκεί η μελέτη των πραγματικών συναρτήσεων και των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών για να καλυφθεί η μελέτη των διανυσματικών συναρτήσεων και των διανυσματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

Β. Οριο και Συνέχεια

1. Οριο

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f : D \subset IR^n \to IR$, όπου D τόπος με $\vec{x}_0 \in \bar{D}$, έχει όριο την πραγματική τιμή L για $\vec{x} \to \vec{x}_0$, δηλαδή $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$, αν οι τιμές $f(\vec{x})$ προσεγγίζουν το όριο L ανεξάρτητα του τρόπου με τον οποίο οι μεταβλητές $\vec{x}$ πλησιάζουν το σημείο $\vec{x}_0$.

2. Συνέχεια

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f : D \subset IR^n \to IR$, όπου D τόπος με $\vec{x}_0 \in \bar{D}$, είναι συνεχής στο σημείο $\vec{x}_0$, αν και μόνο αν $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$.

Γ. Κατευθυνόμενη – Μερική Παράγωγος

Θεωρούμε τη διεύθυνση ενός δοσμένου διανύσματος $\vec{a}$. Ονομάζουμε **κατευθυνόμενη παράγωγο** της f στο σημείο $\vec{x}_0$ στην κατεύθυνση $\vec{a}$ το όριο :

$$D_{\vec{a}}f\left(\overrightarrow{x_0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\overrightarrow{x_0}+t\vec{a}\right)-f\left(\overrightarrow{x_0}\right)}{t}$$

, όπου $\vec{a}=\left(a_1,a_2\right)$ και $\vec{x}_0=\left(x_0,y_0\right)$, το όριο γίνεται :

$$D_{\vec{a}}f\left(x_0,y_0\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+ta_1,y_0+ta_2\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{t}$$

Αν θεωρήσουμε την κατευθυνόμενη παράγωγο κατά τη διεύθυνση ενός από τα μοναδιαία διανύσματα x_i που αποτελούν τη βάση του χώρου IR^n, θα ονομάζεται **μερική παράγωγος** της f ως προς x_i και συμβολίζεται $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Στην ειδική περίπτωση του IR^2 έχουμε ότι

$$D_{(1,0)}f=\frac{\partial f}{\partial x}\ \text{και}\ D_{(0,1)}f=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Η συνέχεια μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών δεν διασφαλίζεται από την ύπαρξη των μερικών παραγώγων, αλλά πρέπει οι μερικές παράγωγοι να είναι και αυτές συνεχείς, σε αντιδιαστολή με ότι συμβαίνει με τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις μιας μεταβλητής που είναι και συνεχείς συναρτήσεις.

Δ. Οι κανόνες της αλυσίδας για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

$IR\to IR^3\to IR$

w=w(x,y,z), x=x(t), y=y(t), z=z(t)

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$IR^2\to IR^3\to IR$

w=*f*(x,y) x=*g*(t,s), y=*h*(t,s)

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial s}$$

Το ολικό διαφορικό της παραπάνω συνάρτησης w(x,y,z) δίνεται από τον τύπο :

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dy$$

Ε. Μερικές Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Η μερική παραγωγισιμότητα μίας συνάρτησης πολλών μεταβλητών οδηγεί σε μία νέα συνάρτηση, η οποία μπορεί επίσης να παραγωγισθεί μερικά. Τότε ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

και αντίστοιχα έχουμε για παράδειγμα :

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)$$

ΣΤ. Ακρότατα – Δεσμευμένα Ακρότατα

Θα μελετήσουμε τα ακρότατα για συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο (α,β) του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν

$$f(x,y) \le f(\alpha,\beta)$$

για κάθε (x,y) σε περιοχή του σημείου (α,β).

Για διαφορίσιμες συναρτήσεις τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι οι ρίζες του συστήματος :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$

Το είδος του ακροτάτου καθορίζεται από τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Θέτουμε : $A(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$.

1η Περίπτωση : Τοπικό Μέγιστο

Θα πρέπει να ισχύει ότι :

$$A(\alpha,\beta) > 0$$

$$\frac{\partial^2 f(\alpha,\beta)}{\partial x^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 f(\alpha,\beta)}{\partial y^2} < 0$$

2η Περίπτωση : Τοπικό Ελάχιστο

Θα πρέπει να ισχύει ότι :

$$A(\alpha,\beta) > 0$$
$$\frac{\partial^2 f(\alpha,\beta)}{\partial x^2} > 0$$
$$\frac{\partial^2 f(\alpha,\beta)}{\partial y^2} > 0$$

3η Περίπτωση : Σαγματικό Σημείο

Θα πρέπει να ισχύει ότι :

$$A(\alpha,\beta) < 0$$

Το σαγματικό σημείο αποτελεί το πολυδιάστατο ανάλογο του σημείου καμπής.

4η Περίπτωση : A(α,β)=0

Δεν είναι δυνατόν να αποφασίσουμε για το είδος του ακροτάτου.

Τα δεσμευμένα ακρότατα σε δύο διαστάσεις ουσιαστικά είναι ακρότατα υπό συνθήκη. Δηλαδή, αναζητούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $y = \phi(x)$. Επομένως αναζητούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $g(x) = f(x, \phi(x))$, η οποία είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής.
Αντίστοιχα, εργαζόμαστε για συναρτήσεις τριών μεταβλητών, στις οποίες τα ακρότατα υπό συνθήκη, οδηγούνται στη μελέτη μίας νέας συνάρτησης δύο μεταβλητών.