Ιόνιο Πανεπιστήμιο - Τμήμα Πληροφορικής

Μαθηματικός Λογισμός

Ενότητα: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παναγιώτης Βλάμος

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Ιόνιο Πανεπιστήμιο»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Παράδειγμα 11

Αν $\varphi(x,y)=x^n e^{-\frac{y^2}{4x}}$, να βρείτε την τιμή του n, για την οποία έχουμε:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

Λύση :

Έχουμε: $$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=nx^{n-1}e^{-\frac{y^2}{4x}}+x^n e^{-\frac{y^2}{4x}}\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{y^2}{4x})=nx^{n-1}e^{-\frac{y^2}{4x}}+x^n e^{-\frac{y^2}{4x}}\frac{y^2}{4x^2} \qquad \text{(i)}$$

και $$\frac{\partial}{\partial y}(y^2\frac{\partial\varphi}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial y}(y^2)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+y^2\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial\varphi}{\partial y})=2y\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \qquad \text{(ii)}$$

αλλά :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x^n e^{-\frac{y^2}{4x}}\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y^2}{4x})=-x^n e^{-\frac{y^2}{4x}}\frac{2y}{4x} \qquad \text{(iii)}$$ οπότε:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-x^n e^{-\frac{y^2}{4x}}\frac{2}{4x}+x^n e^{-\frac{y^2}{4x}}\frac{4y^2}{16x^2} \qquad \text{(iv)}$$

Από τις (i) και (ii) (και με την βοήθεια των (iii) και (iv)) έχουμε:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \Rightarrow$$

$$nx^{n-1}e^{-\frac{y^2}{4x}} + x^n e^{-\frac{y^2}{4x}}\frac{y^2}{4x^2} = -x^n e^{-\frac{y^2}{4x}}\frac{1}{x} - x^n e^{-\frac{y^2}{4x}}\frac{2}{4x} + x^n e^{-\frac{y^2}{4x}}\frac{4y^2}{16x^2} \Rightarrow$$

$$nx^{n-1} + x^{n-1}\frac{y^2}{4} = -x^{n-1} - x^{n-1}\frac{1}{2} + x^{n-1}\frac{y^2}{4} \Rightarrow nx^{n-1} = -\frac{3}{2}x^{n-1} \Rightarrow n = -\frac{3}{2}$$

<u>Παράδειγμα 12</u>

Η θερμοκρασία σ΄ ένα σημείο (x, y) μιάς μεταλλικής πινακίδας στο xy-επίπεδο, είναι: $T(x, y) = \dfrac{xy}{1 + x^2 + y^2}$ βαθμοί Κελσίου.

(α) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας στο (x, y) κατά την διεύθυνση του διανύσματος **a**=2**i**-**j.**

(β) Ένα μυρμήγκι βρίσκεται στο σημείο (1,1) και θέλει να βαδίσει προς την διεύθυνση κατά την οποία η θερμοκρασία μειώνεται πιό γρήγορα. Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα προς την διεύθυνση αυτή.

<u>Λύση :</u>

Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας κατά την κατεύθυνση $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\alpha_1, \alpha_2)$, όπου $|\hat{\boldsymbol{\alpha}}| = 1$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης θερμοκρασίας στο σημείο (x, y) στην κατεύθυνση $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, δηλαδή

$$D_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}T(x, y) = \lim_{t\to 0}\frac{T(x + \alpha_1 t, y + \alpha_2 t) - T(x, y)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{(x + \alpha_1 t)(y + \alpha_2 t)}{1 + (x + \alpha_1 t)^2 + (y + \alpha_2 t)^2} - \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(x + \alpha_1 t)(y + \alpha_2 t)(1 + x^2 + y^2) - xy\left[1 + (x + \alpha_1 t)^2 + (y + \alpha_2 t)^2\right]}{t\left[1 + (x + \alpha_1 t)^2 + (y + \alpha_2 t)^2\right]\cdot(1 + x^2 + y^2)}.$$

Αν γράψουμε τον αριθμητή σαν πολυώνυμο στην μεταβλητή t παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει σταθερός όρος. Συνεπώς ο παράγοντας t του παρονομαστή απλοποιείται και το όριο έχει την τιμή:

$$D_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}T(x,y)=\frac{\left(1+x^2+y^2\right)\left(x\,\alpha_2+y\,\alpha_1\right)-2xy\left(\alpha_1\,x+\alpha_2\,y\right)}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}.\quad (1)$$

(α) Αν $\vec{\alpha}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}$, τότε $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ και $\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}=\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath}-\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}$. Άρα:

$$D_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}T(x,y)=\frac{\left(1+x^2+y^2\right)\left(-\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}}\right)-2xy\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}-\frac{y}{\sqrt{5}}\right)}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}.$$

(β) Στο σημείο $(x,y)=(1,1)$ έχουμε

$$D_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}T(1,1)=\frac{3\left(\alpha_2+\alpha_1\right)-2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}{3^2}=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{9}.$$

Το μυρμήγκι θέλει να βαδίσει προς την κατεύθυνση εκείνου του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\boldsymbol{\alpha}}=(\alpha_1,\alpha_2)$, για το οποίο το άθροισμα των συντεταγμένων του ελαχιστοποιείται. Αν φ είναι η γωνία του διανύσματος με τον Ox ημιάξονα, τότε

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=(\alpha_1,\alpha_2)=(\cos\varphi,\sin\varphi)$$

Συνεπώς πρέπει να βρούμε το σημείο ελάχιστης τιμής για την συνάρτηση $f(\varphi)=\cos\varphi+\sin\varphi,\ \varphi\in[0,2\pi)$.

Έχουμε $f'(\varphi)=-\sin\varphi+\cos\varphi,\ \varphi\in[0,2\pi)$, ενώ η εξίσωση $f'(\varphi)=0$, $\varphi\in(0,2\pi)$ ή $\sin\varphi=\cos\varphi$,

$\varphi\in(0,2\pi)$ έχει λύσεις $\varphi_1=\frac{\pi}{4}$, $\varphi_2=\frac{5\pi}{4}$. Επίσης $f'(\varphi)>0$ όταν και μόνο όταν $\cos\varphi>\sin\varphi$, δηλαδή στα διαστήματα $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, γνησίως φθίνουσα στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$. Από το κριτήριο της πρώτης παραγώγου, παρουσιάζει <u>τοπικό</u> ελάχιστο στο σημείο $\varphi_2=\frac{5\pi}{4}$.

Επειδή $f(0)=1$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$ και $f(0)>f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, η f παρουσιάζει <u>ολικό</u> ελάχιστο στο $\varphi_2=\frac{5\pi}{4}$.

Επομένως $\alpha_1 = \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha_2 = \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και το μυρμήγκι πρέπει να κινηθεί στην κατεύθυνση του $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Παρατήρηση 1:

Ένας άλλος τρόπος είναι να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $g(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$, υπό τον περιορισμό $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$. Είναι φανερό από την μορφή της g ότι αυτό θα πρέπει να συμβαίνει όταν και οι δύο μεταβλητές α_1, α_2 έχουν αρνητική τιμή. Επειδή $\alpha_2 = -\sqrt{1-\alpha_1^2}$, αρκεί να βρεθεί το σημείο ολικού ελαχίστου της $g(\alpha_1) = \alpha_1 - \sqrt{1-\alpha_1^2}$, όταν $\alpha_1 \in [-1,0]$.

Παρατήρηση 2:

Υπολογίστε την έκφραση $\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\alpha_2$, και συγκρίνετε με την σχέση (1).

Τότε έχουμε:

$$D_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}T(x,y) = \left(\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \left|\left(\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right)\right| \; |\hat{\boldsymbol{\alpha}}| \; \cos\theta = \left|\left(\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right)\right| \cos\theta$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\left(\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right)$, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$.

Δηλαδή η $D_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}T(x,y)$ γίνεται ελάχιστη όταν $\theta = -\pi$ ή με άλλα λόγια όταν:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = -\frac{\left(\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right)}{\left|\left(\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right)\right|}$$

Η θερμοκρασία λοιπόν της μεταλλικής πινακίδας στο σημείο (1,1) <u>**μειώνεται**</u> πιό <u>γρήγορα</u> κατά την διεύθυνση του διανύσματος:

$$\boldsymbol{\alpha} = -\left(\frac{\partial T(1,1)}{\partial x}, \frac{\partial T(1,1)}{\partial y}\right) = \left(-\frac{1(1-1^2+1^2)}{(1+1^2+1^2)^2}, -\frac{1(1+1^2-1^2)}{(1+1^2+1^2)^2}\right) = \left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}\right)$$

το μέτρο του οποίου είναι ίσο με $|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{9}\right)^2 + \left(-\frac{1}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{9}$, οπότε το ζητούμενο <u>μοναδιαίο</u> διάνυσμα είναι το:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{9}}\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Παράδειγμα 13

Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση: $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

Λύση :

Βρίσκουμε πρώτα τις παρακάτω (μερικές) παραγώγους

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 12 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Λύνοντας το σύστημα:

$3x^2 - 3 = 0$, $3y^2 - 12 = 0$

παίρνουμε τις λύσεις $x = \pm 1$, $y = \pm 2$, οπότε πιθανά σημεία ακροτάτων είναι τα (1, 2), (1, -2), (-1, 2) και (-1,-2).

Εξετάζουμε για κάθε ένα από αυτά τα σημεία, την τιμή της παρακάτω παράστασης (**διακρίνουσας**):

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 36xy$$

οπότε έχουμε τον ακόλουθο συνοπτικό πίνακα τιμών:

ζεύγος	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	A
(1,2)	6	12	0	72
(1,-2)	6	-12	0	-72
(-1,2)	-6	12	0	-72
(-1,-2)	-6	-12	0	72

i) Στο σημείο (1,2) έχουμε $A > 0$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, άρα στο εν λόγω σημείο έχουμε τοπικό ελάχιστο.

ii) Στο σημείο (-1,-2) έχουμε $A > 0$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, άρα στο εν λόγω σημείο έχουμε τοπικό μέγιστο.

iii) Στα σημεία (-1,2) και (1,-2) έχουμε $A < 0$, άρα πρόκειται γιά σαγματικά σημεία.

Παράδειγμα 14

Δίνεται τρίγωνο με μεταβλητά μήκη πλευρών, αλλά σταθερή περίμετρο ίση με c. Σχηματίζουμε τα τετράγωνα των τριών πλευρών του. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του, γιά τα οποία το άθροισμα των εμβαδών των προηγούμενων τριών τετραγώνων είναι το ελάχιστο δυνατό.

Λύση :
Αν x,y,z είναι τα μήκη των πλευρών του τριγώνου, τότε από την υπόθεση:

x+y+z=c (i)

Το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων των πλευρών του τριγώνου, δίνεται από την:
$E(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ (ii)

συνάρτηση την οποία θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε. Η (ii) με την βοήθεια της (i) γίνεται:

$$E(x,y)=E(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+\{c-(x+y)\}^2$$

απ' όπου παίρνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial x}E(x,y)=2x-2\{c-(x+y)\}=0 \text{ (iii)}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}E(x,y)=2y-2\{c-(x+y)\}=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2x-2\{c-(x+y)\}=2y-2\{c-(x+y)\}\Rightarrow x=y$$

Αλλά τότε από την (iii) :

$$2x-2\{c-(x+y)\}=0\Rightarrow 2x-2c+4x=0\Rightarrow 6x=2c\Rightarrow x=\frac{c}{3}=y$$

και τελικά, από την (i): x+y+z=c$\Rightarrow \dfrac{c}{3}+\dfrac{c}{3}+z=c\Rightarrow z=\dfrac{c}{3}$ δηλαδή το (ζητούμενο) τρίγωνο πρέπει να είναι ισόπλευρο, με μήκος (κάθε) πλευράς ίσο με $\dfrac{c}{3}$.

Παρατήρηση: Το σημείο $(\dfrac{c}{3},\dfrac{c}{3})$ είναι όντως ελάχιστο της συνάρτησης E(x,y), γιατί:
$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}E(x,y)=4=\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}E(x,y)$, $\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x}E(x,y)=2$ οπότε η ποσότητα (διακρίνουσα):

$$A=\frac{\partial^2 E(x,y)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 E(x,y)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 E(x,y)}{\partial x\partial y}\right)^2=16-4=12>0 \quad \text{και η} \quad \frac{\partial^2 E(x,y)}{\partial x^2}>0$$

Παράδειγμα 15

(α) Αν οι πραγματικές συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς με συνεχείς παραγώγους δευτέρας τάξεως και τέτοιες ώστε να ορίζεται η συνάρτηση F(x,y) = f(x+g(y)).

Να δείξετε πως ισχύει: $\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. Η αντικατάσταση $x=r e^{s}$ και $y=r e^{-s}$ ορίζει την συνάρτηση $g(r,s)=f(x(r,s),y(r,s))$. Χρησιμοποιείστε τον κανόνα της αλυσίδας για να υπολογίζεται τις $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial s}$, σε κάθε σημείο (r,s).

Λύση :

(α) Θέτουμε $x+g(y)=u$ και υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της F.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u) \quad \text{(κανόνας αλυσίδας για συνάρτηση μιάς μεταβλητής)}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f''(u)\frac{\partial u}{\partial x}=f''(u)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=f'(u)g'(y) \text{ άρα } \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f''(u)\frac{\partial u}{\partial y}=f''(u)g'(y)$$

οι οποίες αν αντικατασταθούν στην σχέση που μας δίνεται, είναι φανερό ότι την επαληθεύουν.

(β) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε:

$$\frac{\partial g}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{x}{x^2+y^2}\cdot e^{s}+\frac{y}{x^2+y^2}e^{-s}$$

γιατί:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

και ανάλογα (λόγω συμμετρίας της f ως προς x και y): $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$

Τέλος, πάλι από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{\partial g}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{x}{x^2+y^2}\cdot re^{s}-\frac{y}{x^2+y^2}\cdot re^{-s}$$

Παράδειγμα 16

Εστω $w=\ln\left(e^r+e^s+e^t+e^u\right)$. Να υπολογίσετε τη μερική παράγωγο τέταρτης τάξης:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r\partial s\partial t\partial u}.$$

Λύση :

Εχουμε ότι $e^w=e^r+e^s+e^t+e^u$. Θεωρώντας τη μερική παράγωγο ως προς r προκύπτει ότι :

$$e^w\frac{\partial w}{\partial r}=e^r \text{ ή } \frac{\partial w}{\partial r}=e^{r-w}.$$

Ομοια : $\frac{\partial w}{\partial s}=e^{s-w}$, $\frac{\partial w}{\partial t}=e^{t-w}$, $\frac{\partial w}{\partial u}=e^{u-w}$.

Οπότε

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial u}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{u-w}\right)=e^{u-w}\left(-1\right)\frac{\partial w}{\partial t}=-e^{u+t-2w}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial s\partial t\partial u}=\frac{\partial}{\partial s}\left(-e^{u+t-2w}\right)=\left(-e^{u+t-2w}\right)\left(-2\right)\frac{\partial w}{\partial s}=2e^{u+t+s-3w}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r\partial s\partial t\partial u}=\frac{\partial}{\partial r}\left(2e^{u+t+s-3w}\right)=-6e^{u+t+s+r-4w}$$

Παράδειγμα 17

Εστω η συνάρτηση $f : IR\to IR$ και $w=f\left(r\right)$, όπου $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{dw}{dr}\right)^2$$

Λύση :

Εχουμε ότι $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$ και όμοια $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$.

Αρα $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{df\left(r\right)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{dw}{dr}\frac{x}{r}$ και όμοια $\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{dw}{dr}\frac{y}{r}$, $\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{dw}{dr}\frac{z}{r}$.

Επομένως

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right)=\left(\frac{dw}{dr}\right)^2.$$

Παράδειγμα 18

Ενα τετραγωνικό κουτί, ανοιχτό στο πάνω μέρος έχει όγκο 32 κ.μ. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του, ώστε η συνολική επιφάνειά του να είναι ελάχιστη ;

Λύση :

Ο όγκος του κουτιού είναι : $V = xyz = 32$, οπότε $z = \frac{32}{xy}$. Η επιφάνειά του είναι :

$$E = xy + 2yz + 2xz \text{ ή } E(x,y) = xy + \frac{64}{x} + \frac{64}{y}.$$

Τότε έχουμε ότι

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= y - \frac{64}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial y} &= x - \frac{64}{y^2} = 0 \end{aligned}\right\}$$

απ' όπου προκύπτει ότι x=y.

Αρα $x = 4,\ y = 4,\ z = 2$. Στο σημείο αυτό έχουμε ότι :

$$A = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}\right)^2 = \left(\frac{128}{4^3}\right)\left(\frac{128}{4^3}\right) - 1 > 0 \text{ και } \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} > 0,\ \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} > 0$$

συνεπώς το σημείο $(x, y, z) = (4,4,2)$ αποτελεί θέση τοπικού ελαχίστου.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Άσκηση 1

Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο : $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{4x+y-3z}{2x-5y+2z}$

Άσκηση 2

Να εξετασθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση :

$$f(x,y)=\begin{cases} x\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Οι μερικές της παράγωγοι ορίζονται στο (0,0) ?

Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $w=f\left(\dfrac{y-x}{xy},\dfrac{z-x}{xz}\right)$, όπου f παραγωγίσιμη,

επαληθεύει τη σχέση :

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x}+y^2\frac{\partial w}{\partial y}+z^2\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

Άσκηση 4

Εστω $x+y^2=u,\ y+z^2=v,\ z+x^2=w$. Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial x}{\partial u},\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2},\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}$, υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις που ορίζουν τα z,y,x ως προς u,v,w είναι δύο φορές παραγωγίσιμες.

Άσκηση 5

Ποιο είναι το μέγιστο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x,y)=\dfrac{\sin x-\sin y}{\tan x-\tan y}$, στο οποίο είναι συνεχής ;

Άσκηση 6

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση της αρχής των συντεταγμένων από τα σημεία της καμπύλης : $5x^2+6xy+5y^2-8=0$.

Άσκηση 7

Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y,z)=xy^2z^3$, πάνω στο επίπεδο : $x+y+z=1$.

Άσκηση 8

Ενας εργοστασιάρχης παράγει τρία προϊόντα Α,Β,Γ σε ποσότητες x,y,z. Το κέρδος του δίνεται από τη συνάρτηση : $P(x,y,z)=2x+8y+24z$. Να βρείτε τις τιμές των x,y,z για τις οποίες θα μεγιστοποιήσει το κέρδος του αν η παραγωγή πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση : $x^2+2y^2+4z^2=4500000$.

Άσκηση 9

Αν $F\left(\frac{x}{y},\frac{z}{y}\right)=0$, να αποδείξετε ότι : $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

Άσκηση 10

Αν $F\left(x+y-z,x^2+y^2\right)=0$, να αποδείξετε ότι : $x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=x-y$.

Άσκηση 11

Αν βρισκόμαστε στο σημείο P(3,2) σε ποια κατεύθυνση πρέπει να κινηθούμε για να μηδενισθεί η παράγωγος της $f(x,y)=xy+y^2$;

Άσκηση 12

Αν βρισκόμαστε στο σημείο P(1,2) σε ποια κατεύθυνση ο ρυθμός μεταβολής της $f(x,y)=x^2-3xy+4y^2$ θα ισούται με 14 ;

Άσκηση 13

Οι καμπύλες σταθερής θερμοκρασίας καλούνται ισόθερμες. Αν η συνάρτηση θερμοκρασίας δίνεται από τον τύπο $T(x,y)=x^2+2y^2-x$, στον κυκλικό δίσκο $x^2+y^2\le 1$ του επιπέδου xy.

Άσκηση 14

Να προσδιορισθούν τα άκρα ολοκλήρωσης α,β, έτσι ώστε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta}\left(6-x-x^2\right)dx$, να παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Άσκηση 15

Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x,y)=xy+2x-\ln\left(x^2y\right)$

Άσκηση 16

Να βρείτε ποιο από τα σημεία του γραφήματος της $z=10-x^2-y^2$, που ανήκουν στο επίπεδο $x+2y+3z=0$ απέχει τη μέγιστη απόσταση από το επίπεδο αυτό.

Άσκηση 17

Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y)=3x+4y$ στον κύκλο $x^2+y^2=1$.