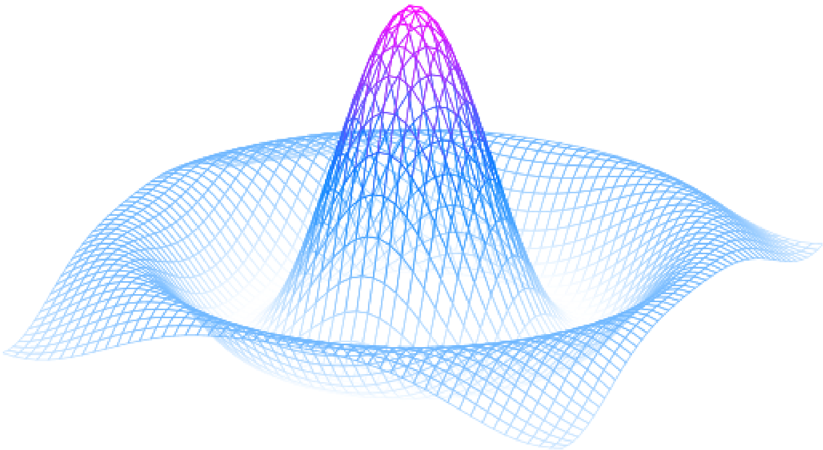
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ



Δεκέμβριος 2019

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μιγαδικοί αριθμοί

1.1 Το σύνολο $\mathbb{C}$

Τα διάφορα αριθμητικά σύνολα προκύπτουν με διαδοχικές επεκτάσεις του συνόλου των **φυσικών αριθμών** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$:

- Για την επίλυση εξισώσεων του τύπου $a + x = b$, με $a > b$, εισάγονται οι **αρνητικοί αριθμοί** και το $\mathbb{N}$ διευρύνεται στο σύνολο των **ακεραίων αριθμών** $\mathbb{Z}$.

- Για την επίλυση εξισώσεων του τύπου $a \cdot x = b$, όταν ο ακέραιος $a \neq 0$ δεν διαιρεί τον ακέραιο b, εισάγονται οι **κλασματικοί αριθμοί** και το $\mathbb{Z}$ διευρύνεται στο σύνολο των **ρητών αριθμών** $\mathbb{Q}$.

- Για την επίλυση εξισώσεων του τύπου $x^2 = c$, όταν ο $c > 0$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο, εισάγονται οι **άρρητοι αριθμοί** και το $\mathbb{Q}$ διευρύνεται στο σύνολο των **πραγματικών αριθμών** $\mathbb{R}$.

Η *επόμενη και τελευταία επέκταση* προκύπτει από την ανάγκη επίλυσης εξισώσεων του τύπου $x^2 = c$, όταν ο c είναι αρνητικός αριθμός. Εισάγεται η **φανταστική μονάδα** i με την ιδιότητα

$$i^2 = -1 \ ,$$

δηλαδή η τετραγωνική ρίζα του αρνητικού αριθμού -1, η οποία δεν μπορεί φυσικά να είναι πραγματικός αριθμός. Προκύπτουν έτσι οι **φανταστικοί αριθμοί**, που έχουν τη μορφή $b \cdot i$ με $b \in \mathbb{R}$ και το $\mathbb{R}$ διευρύνεται στο σύνολο $\mathbb{C}$ που το αποτελούν οι **μιγαδικοί αριθμοί**, δηλαδή οι αριθμοί της μορφής

$$a + bi \ , \qquad \text{με } a, b \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 1-1

Διάφορα στοιχεία του $\mathbb{C}$:

$$6\ ,\ 0\ ,\ 9i\ ,\ 2+10i\ ,\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\ ,\ 10+\pi i\ ,\ \sqrt{10}i\ ,\ 3\pi i\ ,\ \sqrt{2}\ .$$

■

Με την εισαγωγή της φανταστικής μονάδας i λύνονται όλα! Πρώτα πρώτα κάθε αρνητικός αριθμός (και όχι μόνο ο -1) αποκτά τετραγωνική ρίζα, αφού για παράδειγμα είναι $-5 = 5i^2$ και επομένως ο -5 έχει ρίζα τον $i\sqrt{5}$ (όπως και τον $-i\sqrt{5}$). Αλλά αποδεικνύεται ότι κάθε μιγαδικός αριθμός έχει μέσα στο $\mathbb{C}$ τετραγωνική ρίζα, όπως και κυβική ρίζα και χιλιοστή ρίζα, ακόμη και i-στή ρίζα και οποιαδήποτε άλλη. Τελικά ισχύει και το λεγόμενο **θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας**, σύμφωνα με το οποίο *κάθε πολυώνυμο βαθμού n με μιγαδικούς συντελεστές έχει n ρίζες (όχι κατ᾽ ανάγκη διαφορετικές).*

Παράδειγμα 1-2

Τριώνυμο με αρνητική διακρίνουσα:
Το τριώνυμο

$$x^2+x+2$$

έχει αρνητική διακρίνουσα $\Delta = -7$ και επομένως δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{R}$. Στο $\mathbb{C}$ όμως έχει δύο ρίζες, αφού εφαρμόζοντας τον τύπο επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2} \\ &= \frac{-1\pm\sqrt{7i^2}}{2}\ , \end{aligned}$$

δηλαδή $x_1 = -1/2 + i(\sqrt{7}/2)$, $x_2 = -1/2 - i(\sqrt{7}/2)$ και

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\ .$$

Επιβεβαιώνουμε το αποτέλεσμα με το σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας WolframAlpha (στο εξής σε τέτοιο πλαίσιο κάθε φορά):

Ερ `x^2 + x + 2 = 0`

Απ `Complex solutions:` $x = -\frac{1}{2}\,i\left(\sqrt{7} + -i\right) \quad x = \frac{1}{2}\,i\left(\sqrt{7} + i\right)$

■

Η ονομασία φανταστικοί αριθμοί μπορεί να παραπλανήσει προκαλώντας την εντύπωση ότι οι αριθμοί αυτοί και γενικά οι μιγαδικοί δεν «υπάρχουν» στ΄ αλήθεια. Οι μιγαδικοί όμως είναι, ως μαθηματικές δημιουργίες, εξίσου υπαρκτοί με τα άλλα είδη αριθμών. Επίσης, σύμφωνα με την κβαντική φυσική, είναι *αναγκαίοι για την περιγραφή του φυσικού κόσμου.*

1.2 Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς

Ένας τυχαίος μιγαδικός αριθμός συμβολίζεται συνήθως ως

$$z = x + iy\ , \qquad \text{με}\ \ x, y \in \mathbb{R}$$

και λέμε ότι

- το **πραγματικό μέρος** του z, που συμβολίζεται με $Re\, z$, είναι ίσο με x,
- το **φανταστικό μέρος** του z, που συμβολίζεται με $Im\, z$, είναι ίσο με y.

Στην **πρόσθεση** δύο μιγαδικών προστίθενται χωριστά τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών έχουμε

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

(Ενώ ο πολλαπλασιασμός του z με έναν πραγματικό αριθμό λ δίνει τον $\lambda z = \lambda x + i\lambda y$. Ο *αντίθετος* ενός μιγαδικού z είναι ο $-z = (-1)z$ και για την **αφαίρεση** δύο μιγαδικών έχουμε $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.) Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες *αντιμεταθετική*, *προσεταιριστική*, *ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου*, *ύπαρξη αντιστρόφου* και *επιμεριστική*:

$$
\begin{array}{ll}
z_1 + z_2 = z_2 + z_1 & z_1\, z_2 = z_2\, z_1 \\
(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) & (z_1\, z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2\, z_3) \\
z + 0 = z & 1\, z = z \\
z + (-z) = 0 & z\, z^{-1} = 1 \ (\text{για } z \neq 0) \\
z_1\, (z_2 + z_3) = z_1\, z_2 + z_1\, z_3 &
\end{array}
$$

Ο **συζυγής** ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ είναι ο

$$\overline{z} = x - iy \ ,$$

δηλαδή ο μιγαδικός που έχει το ίδιο πραγματικό μέρος με τον z και αντίθετο φανταστικό. Ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $z + \overline{z} = 2\, Re\, z$
2. $z - \overline{z} = 2i\, Im\, z$
3. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\, \overline{z_2}$
5. $z\, \overline{z} = |z|^2$

Στην τελευταία ιδιότητα $|z|$ είναι το **μέτρο** του z, που ορίζεται από τον τύπο

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

Το μέτρο ενός μιγαδικού είναι λοιπόν, όπως βλέπουμε, ένας πραγματικός αριθμός. (Επίσης παρατηρούμε ότι αν ο z είναι πραγματικός το μέτρο του είναι η απόλυτη τιμή του.)

Για την **διαίρεση** δύο μιγαδικών έχουμε

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\, \overline{z_2}}{z_2\, \overline{z_2}} = \frac{z_1\, \overline{z_2}}{|z_2|^2} \ .$$

Ο παρονομαστής είναι πραγματικός αριθμός και επομένως η πράξη ανάγεται σε πολλαπλασιασμό μιγαδικών. Ο *αντίστροφος* ενός μη μηδενικού μιγαδικού z θα είναι ο

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\, \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \ .$$

Για το μέτρο σε σχέση με τις πράξεις μιγαδικών ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
2. $|z_1\, z_2| = |z_1|\, |z_2|$
3. $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$
4. $|\overline{z}| = |z|$

Παράδειγμα 1-3

Για τους μιγαδικούς $z_1 = 4 + 6i$ και $z_2 = 3 - 7i$ βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (4 + 3) + (6 - 7)i = 7 - i \\
z_1\, z_2 &= [4 \cdot 3 - 6(-7)] + [4(-7) + 6 \cdot 3]i = 54 - 10i \\
\overline{z_1} &= 4 - 6i \\
\overline{z_2} &= 3 + 7i \\
|z_1| &= \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} \\
|z_2| &= \sqrt{3^2 + (-7)^2} = \sqrt{58} \\
|z_1\, z_2| &= \sqrt{54^2 + (-10)^2} = \sqrt{3016} = \sqrt{52 \cdot 58} = |z_1|\, |z_2| \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1\, \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(4 + 6i)(3 + 7i)}{58} = \frac{-30 + 46i}{58} = -\frac{15}{29} + \frac{23}{29}i
\end{aligned}$$

Ερ `(4+6i)(3-7i)`

Απ `54-10i`

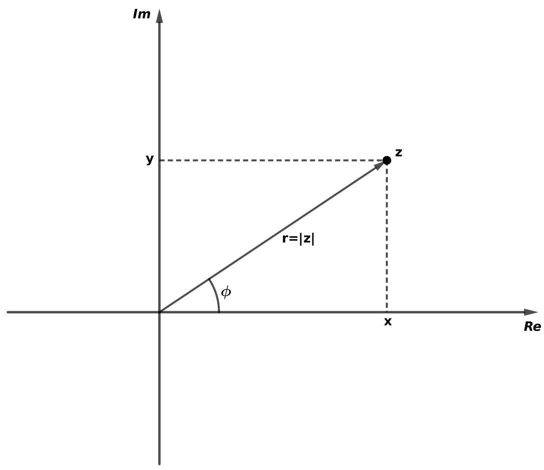
Ερ `(4+6i)/(3-7i)`

Απ $-\frac{15}{29} + \frac{23\mathtt{i}}{29}$

■

1.3 Το μιγαδικό επίπεδο

Όπως έχουμε την ευθεία των πραγματικών αριθμών έτσι έχουμε και το επίπεδο των μιγαδικών ή **μιγαδικό επίπεδο**: Ένα σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) αντιστοιχεί στον μιγαδικό $z = x + iy$ (σχήμα 1.1). Ο οριζόντιος άξονας είναι η πραγματική ευθεία και ο κατακόρυφος η ευθεία των φανταστικών αριθμών.



Σχήμα 1.1: Γεωμετρική αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού

Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ως γεωμετρική αναπαράσταση του $x + iy$, αντί για το σημείο (x, y), το **διάνυσμα** με αρχή την αρχή των αξόνων $(0, 0)$ και τέλος το σημείο (x, y). Κάθε μιγαδικός λοιπόν z αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο. Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι *το μήκος του διανύσματος είναι ίσο με* $\sqrt{x^2 + y^2}$ *δηλαδή με το μέτρο του* z.

Ο τύπος $z = x + iy$ λέμε ότι μας δίνει την **καρτεσιανή μορφή** του μιγαδικού z. Μπορούμε όμως να προσδιορίσουμε τον z και με έναν διαφορετικό τρόπο. Αντί να δώσουμε τις συνιστώσες x και y να δώσουμε το μήκος του διανύσματος, δηλαδή το **μέτρο** του z, που το συμβολίζουμε τότε και r, μαζί με τη γωνία ϕ που σχηματίζει με τον θετικό πραγματικό ημιάξονα. Η γωνία αυτή ονομάζεται **όρισμα** του z. Παίρνουμε τότε την **πολική μορφή** του z, συμβολικά

$$z = r\angle\phi \ .$$

Από την καρτεσιανή μεταβαίνουμε στην πολική μορφή με τις σχέσεις

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (\,\phi \in [0, 2\pi)\,)$$

και από την πολική στην καρτεσιανή με τις

$$x = r\cos\phi$$
$$y = r\sin\phi \ .$$

Παράδειγμα 1-4

Ο $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ έχει μέτρο και όρισμα

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$
$$\phi = \tan^{-1}(\sqrt{3}/1) = \pi/3$$

αντίστοιχα και άρα η πολική μορφή του είναι

$$z_1 = 2\,\angle\pi/3\ .$$

Ερ `1 + i * sqrt(3)`

Απ `Polar coordinates: r = 2,` $\quad \theta = 60°$

Ο $z_2 = \sqrt{2}\,\angle\pi/4$ έχει

$$x = \sqrt{2}\,\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$
$$y = \sqrt{2}\,\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

και συνεπώς η καρτεσιανή μορφή του είναι

$$z_2 = 1 + i\ .$$

Ερ `sqrt(2) * exp(i * pi/4)`

Απ `Decimal form: 1 + 1i`

■

Ένας μιγαδικός αριθμός με μέτρο ίσο με 1 (που το διάνυσμά του θα πέφτει πάνω στον μοναδιαίο κύκλο) θα έχει την μορφή $\cos\phi + i\sin\phi$, αν ϕ είναι το όρισμά του. (Ισχύει $\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = 1$ για κάθε ϕ.) Αυτό σημαίνει ότι η πολική μορφή ενός μιγαδικού z με μέτρο $|z| = r$ και όρισμα ϕ μπορεί να γραφτεί ως

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)\ .$$

Πιο σύντομα και βολικά θα είναι

$$z = r\,e^{i\phi}\ ,$$

επειδή ισχύει ο **τύπος του Euler**:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \ .$$

Μία απόδειξη της σχέσης αυτής δίνεται στην ενότητα 4.3.4. Από τον τύπο του Euler εύκολα προκύπτει και ο **τύπος του De Moivre**:

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi \ .$$

Η καρτεσιανή μορφή των μιγαδικών βολεύει για προσθέσεις και αφαιρέσεις και η πολική για πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις.

Παράδειγμα 1-5

Για τους z_1 και z_2 του προηγούμενου παραδείγματος έχουμε:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 2 + (1+\sqrt{3})i \\ z_1\, z_2 &= (2\, e^{i\frac{\pi}{3}})\,(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}) \\ &= 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}} \end{aligned}$$

■

Όπως φαίνεται και από το παράδειγμα, η *γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού* ενός μιγαδικού με έναν άλλον είναι η εξής: Αν ο μιγαδικός z πολλαπλασιαστεί με τον w, το μέτρο του z πολλαπλασιάζεται με το μέτρο του w και το όρισμα του z αυξάνεται κατά το όρισμα του w. Έχουμε δηλαδή μια *μεγέθυνση (ή σμίκρυνση) του διανύσματος του μιγαδικού και μία περιστροφή του.*

Με την εισαγωγή των μιγαδικών αριθμών πολλά προβλήματα πραγματικών αριθμών απλουστεύονται ή γίνεται δυνατή η επίλυσή τους ενώ δεν ήταν.

Παράδειγμα 1-6

Οι τύποι για το συνημίτονο και το ημίτονο ενός αθροίσματος υπολογίζονται συγχρόνως ως εξής:

$$\begin{aligned} e^{i(\phi_1+\phi_2)} &= \cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2) \\ e^{i(\phi_1+\phi_2)} &= e^{i\phi_1}\, e^{i\phi_2} \\ &= (\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)\,(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \\ &= (\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2) \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη στα δεξιά μέλη βρίσκουμε

$$\cos(\phi_1 + \phi_2) = \cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \sin\phi_2$$
$$\sin(\phi_1 + \phi_2) = \sin\phi_1 \cos\phi_2 + \cos\phi_1 \sin\phi_2 \ .$$

■

Παράδειγμα 1-7

Αν δύο ακέραιοι αριθμοί μπορούν να γραφτούν ως αθροίσματα δύο τέλειων τετραγώνων το ίδιο ισχύει και για το γινόμενό τους. Για παράδειγμα είναι

$$5 = 2^2 + 1^2$$
$$13 = 3^2 + 2^2$$

και

$$5 \cdot 13 = 65 = 8^2 + 1^2 \ .$$

Για να αποδείξουμε ότι ισχύει γενικά ας πάρουμε τους

$$\kappa = a^2 + b^2 \ , \qquad \lambda = c^2 + d^2 \ ,$$

όπου a, b, c, d ακέραιοι και τους

$$z_1 = a + ib \ , \qquad z_2 = c + id \ .$$

Θα είναι

$$\kappa\,\lambda = |z_1|^2\,|z_2|^2 = |z_1\,z_2|^2 = [Re\,(z_1\,z_2)]^2 + [Im\,(z_1\,z_2)]^2$$

και συνεπώς καταλήξαμε στο ζητούμενο, αφού το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $z_1\,z_2$ θα είναι κι αυτοί ακέραιοι (οι $ac - bd$ και $ad + bc$). ■

(Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η χρήση μιγαδικών συναρτήσεων για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων πραγματικών συναρτήσεων, που διαφορετικά είναι πολύ δύσκολος ή αδύνατος. Η μιγαδική ανάλυση όμως είναι εκτός του πλαισίου αυτών των σημειώσεων.)

1.4 ν-ιοστές ρίζες μιγαδικού

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας η εξίσωση

$$\zeta^\nu - 1 = 0$$

έχει ν λύσεις, δηλαδή ο 1 έχει ν ν-ιοστές ρίζες. Θα πρέπει αν $\zeta = |\zeta|\, e^{i\theta}$ να είναι $|\zeta|^\nu = 1$ κι επομένως $|\zeta| = 1$ και για το εκθετικό μέρος

$$e^{i\nu\theta} = e^{i0} = 1$$

ή

$$\theta = \frac{2k\pi}{\nu} \ ,$$

όπου k ακέραιος. Επομένως οι ν **ν-ιοστές ρίζες της μονάδας** θα είναι οι

$$\zeta_k = e^{i\frac{2k\pi}{\nu}}$$

με $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, \nu - 1$.
(Αν πάρουμε τιμές του k πέραν του $\nu - 1$ ή αρνητικές δεν βρίσκουμε άλλες ρίζες αλλά επαναλαμβάνονται οι ήδη υπολογισμένες. Η πρώτη ν-ιοστή ρίζα είναι φυσικά η $\zeta_0 = 1$.) Παρατηρούμε ότι είναι

$$\zeta_k = \zeta^k \ , \qquad \text{όπου } \zeta = e^{i\frac{2\pi}{\nu}} \ .$$

Οι ρίζες αυτές σχηματίζουν στο μιγαδικό επίπεδο *ένα κανονικό πολύγωνο ν πλευρών*, ενώ ισχύουν οι σχέσεις

$$z - 1 = (z - \zeta_0)\,(z - \zeta_1)\ldots(z - \zeta_{\nu-1})$$

και

$$\zeta_0 + \zeta_1 + \ldots + \zeta_{\nu-1} = 0 \ .$$

Παράδειγμα 1-8

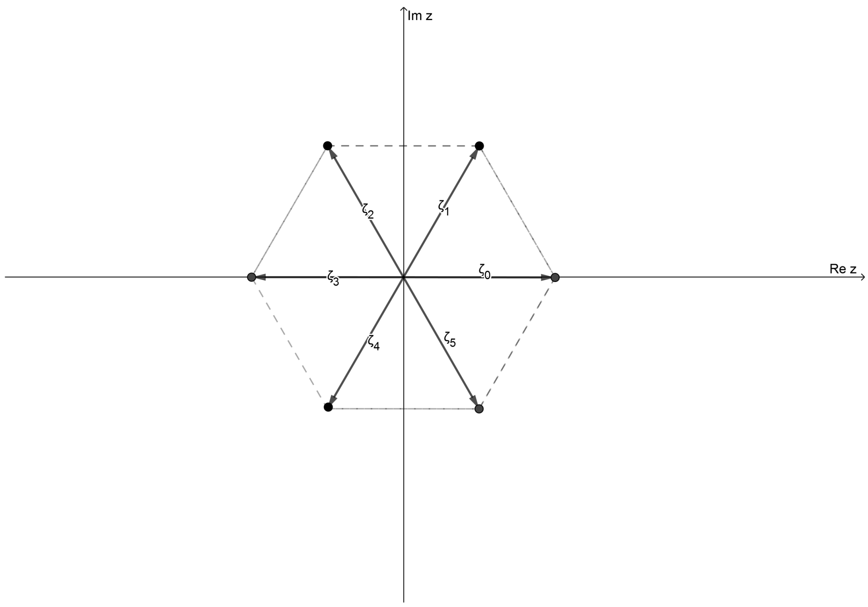
Για τις έκτες ρίζες του 1 έχουμε

$$\zeta_k = e^{i\frac{2k\pi}{6}}$$

και συνεπώς αυτές θα είναι οι

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &= e^{i0} = 1\\
\zeta_1 &= e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}\\
\zeta_2 &= e^{i\frac{4\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}\\
\zeta_3 &= e^{i\frac{6\pi}{6}} = -1\\
\zeta_4 &= e^{i\frac{8\pi}{6}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}\\
\zeta_5 &= e^{i\frac{10\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{3}} \ .
\end{aligned}$$

Στο μιγαδικό επίπεδο σχηματίζουν ένα κανονικό εξάγωνο (σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2: Οι 6 έκτες ρίζες της μονάδας ως διανύσματα στο μιγαδικό επίπεδο: Έχουν όλες μέτρο 1 και απέχουν κατά γωνία $2\pi/6 = \pi/3$ η μία από την άλλη

Ερ `1 ^ (1/6)`

Απ `All 6th roots of 1 :`

$$\mathtt{e}^0,\ \mathtt{e}^{(\mathtt{i}\pi)/3},\ \mathtt{e}^{(2\mathtt{i}\pi)/3},\ \mathtt{e}^{\mathtt{i}\pi},\ \mathtt{e}^{-(2\mathtt{i}\pi)/3},\ \mathtt{e}^{-(\mathtt{i}\pi)/3}$$

■

Για έναν τυχαίο μιγαδικό $z = |z|\,e^{i\phi}$ οι ν-ιοστές του ρίζες θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$w^\nu - z = 0$$

και θα δίνονται ως

$$w_k = \sqrt[\nu]{|z|}\,e^{i\frac{2k\pi+\phi}{\nu}}$$

για $k = 0, 1, \ldots, \nu - 1$.

Παράδειγμα 1-9

Οι τέταρτες ρίζες του $1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ θα είναι οι

$$w_k = \sqrt[8]{2}\,e^{i\frac{2k\pi+(\pi/4)}{4}}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{\pi}{16}} \\ w_1 &= \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{9\pi}{16}} \\ w_2 &= \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{17\pi}{16}} \\ w_3 &= \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{25\pi}{16}} \ . \end{aligned}$$

Στο μιγαδικό επίπεδο σχηματίζουν ένα τετράγωνο.

Ερ $(1+\mathtt{i})$ ^ $(1/4)$

Απ `All 4th roots of` $1+\mathtt{i}$:

$$\sqrt[8]{2}\,\mathrm{e}^{(\mathtt{i}\pi)/16}, \quad \sqrt[8]{2}\,\mathrm{e}^{(9\mathtt{i}\pi)/16}, \quad \sqrt[8]{2}\,\mathrm{e}^{-(15\mathtt{i}\pi)/16}, \quad \sqrt[8]{2}\,\mathrm{e}^{-(7\mathtt{i}\pi)/16}$$

■

Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες

2.1 Γενικά

Ακολουθία ονομάζεται μία συνάρτηση

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ ,$$

δηλαδή μία συνάρτηση που τα ορίσματά της είναι μόνο φυσικοί αριθμοί. Οι τιμές της συμβολίζονται a_0, a_1, a_2 ... (αντί για $a(0)$, $a(1)$, $a(2)$ ..., που θα αντιστοιχούσε στον συμβολισμό $f(x)$). Ακριβέστερα, το πεδίο ορισμού μπορεί να είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$ (όπως το $\mathbb{N}^*$, οπότε οι τιμές της ακολουθίας αρχίζουν από την a_1), ενδεχομένως και πεπερασμένο. Χρησιμοποιούμε συμβολισμούς όπως

$$\{a_n\} \ , \quad \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \ , \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \ , \quad \{a_n\}_{n=n_1}^{n=n_2} \ .$$

Πεδίο τιμών μπορεί αντί του $\mathbb{R}$ να είναι το $\mathbb{C}$, οπότε αντί για *πραγματική* θα έχουμε μία *μιγαδική ακολουθία*.

Οι τιμές μιας ακολουθίας $\{a_n\}$

- μπορεί να δίνονται από τον **γενικό όρο** της a_n, για παράδειγμα

$$a_n = \sqrt{n} + 1 \ ,$$

- μπορεί να δίνονται από έναν **αναδρομικό τύπο** (μαζί με κάποιες αρχικές τιμές), όπως για παράδειγμα η *ακολουθία Fibonacci*, με

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (a_0 = 0 \ , \ a_1 = 1) \ ,$$

  που παίρνει τις τιμές

$$a_0 = 0 \ , \ a_1 = 1 \ , \ a_2 = 1 \ , \ a_3 = 2 \ , \ a_4 = 3 \ , \ a_5 = 5 \ , \ a_6 = 8 \ , \ \ldots$$

- μπορεί να είναι φαινομενικά απρόβλεπτες, όπως

$$a_1 = 1 \ , \ a_2 = 4 \ , \ a_3 = 1 \ , \ a_4 = 4 \ , \ a_5 = 2 \ , \ \ldots \ ,$$

  που είναι τα ψηφία του $\sqrt{2}$, άρα στην πραγματικότητα η ακολουθία είναι πλήρως προσδιορισμένη,

- μπορεί να είναι πραγματικά απρόβλεπτες και να πρέπει να μας δοθούν συγκεκριμένα μία μία (αν είναι πεπερασμένου αριθμού).

Παράδειγμα 2-1

Η ακολουθία $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ με

$$a_n = n^2 + 1$$

έχει τιμές τις

$$1, 2, 5, 10, 17, 26, \ldots$$

■

Παράδειγμα 2-2

Η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ με αναδρομική σχέση

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \qquad (a_1 = 2) \ ,$$

έχει τιμές τις

$$2, 4, 5, 5.5, 5.75, \ldots$$

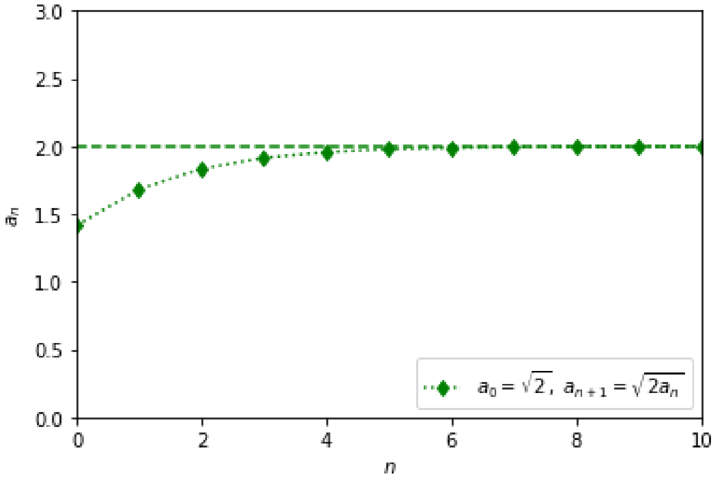
■

2.1.1 Όριο ακολουθίας

Σε μια συνάρτηση $f(x)$ εξετάζουμε γενικά τα όριά της για $x \to \pm\infty$ και $x \to x_0$ (για μια συγκεκριμένη τιμή x_0). Στις ακολουθίες, που το όρισμά τους n παίρνει διακριτές τιμές, έχει νόημα μόνο η οριακή συμπεριφορά για μεγάλες τιμές του n ($n \to \infty$). Σε μια ακολουθία $\{a_n\}$ ενδέχεται τότε:

- Ο a_n να πλησιάζει οσοδήποτε μια συγκεκριμένη τιμή L.
  (Η διαφορά $|a_n - L|$ να γίνεται μικρότερη από μια οσοδήποτε μικρή θετική τιμή ε,

$$|a_n - L| < \varepsilon$$



Σχήμα 2.1: Η σύγκλιση της ακολουθίας με $a_0 = \sqrt{2}$ και $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$

για $n \geq N_0$, όπου N_0 μια αρκετά μεγάλη τιμή για το n.)
Λέμε στην περίπτωση αυτή ότι η ακολουθία **συγκλίνει** στο L ή ότι L είναι το **όριό** της:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ή} \qquad a_n \to L \quad \text{για} \quad n \to \infty\ .$$

- Να μη συμβαίνει κάτι τέτοιο, οπότε η $\{a_n\}$ **αποκλίνει**.
  - Ειδικά, αν οι τιμές του a_n μπορούν να γίνουν οσοδήποτε μεγάλες παίρνοντας αρκετά μεγάλο n, η ακολουθία **αποκλίνει στο άπειρο**:

    $$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{ή} \qquad a_n \to \infty \quad \text{για} \quad n \to \infty\ .$$

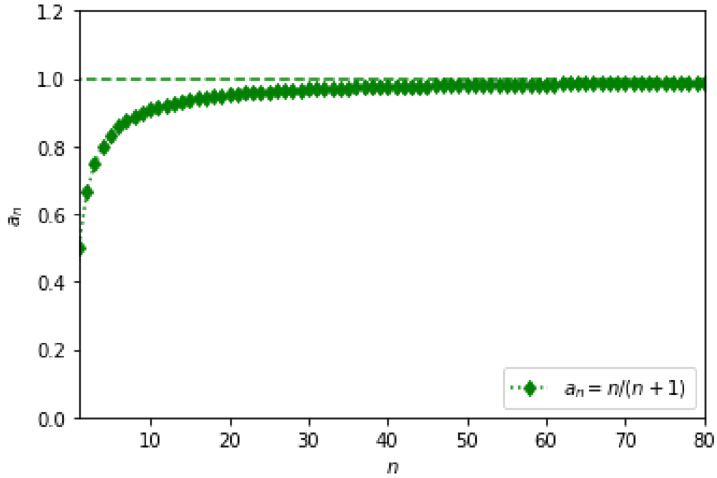
    (Για τιμές πολύ μεγάλες κατά απόλυτη τιμή αλλά με αρνητικό πρόσημο έχουμε $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.)

Παράδειγμα 2-3

Για την ακολουθία $\{a_n\}$ που δίνεται από τον αναδρομικό τύπο

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \qquad (a_0 = \sqrt{2})$$

ισχύει, όπως θα δούμε, ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ (σχήμα 2.1). ■



Σχήμα 2.2: Η σύγκλιση της ακολουθίας με $a_n = n/(n+1)$

Παράδειγμα 2-4

Έστω η ακολουθία $\{a_n\}$ με

$$a_n = \frac{n}{n+1}\ , \qquad n \geq 1\ .$$

Για τη διαφορά $|a_n - 1|$ έχουμε ότι

$$|a_n - 1| = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\ ,$$

δηλαδή μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή παίρνοντας αρκετά μεγάλο n. Επομένως $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ (σχήμα 2.2).

Ερ `limit n/(n+1) as n->infinity`

Απ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

■

Παράδειγμα 2-5

Η ακολουθία $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ με

$$a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$$

παίρνει τις τέσσερις τιμές 0, 1, 0, -1 που επαναλαμβάνονται περιοδικά. Επομένως αποκλίνει.

Ερ `limit sin(n * pi/2) as n->infinity`

Απ $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -1$ to 1

■

Παράδειγμα 2-6

Η ακολουθία $\{a_n\}$ με

$$a_n = 2^n$$

παίρνει τιμές που μεγαλώνουν απεριόριστα με το n και επομένως θα έχουμε $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. ■

2.1.2 Ιδιότητες ορίων

Αν $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ είναι δύο συγκλίνουσες ακολουθίες τότε

1. $$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

2. $$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$$

3. $$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

4. $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \qquad \text{αν} \quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

5. $$\lim_{n\to\infty} a_n^c = (\lim_{n\to\infty} a_n)^c, \qquad \text{αν} \quad a_n \geq 0$$

2.1.3 Μονοτονία

Μία ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται

- **αύξουσα**, αν $a_{n+1} > a_n$, για κάθε n,
- **φθίνουσα**, αν $a_{n+1} < a_n$, για κάθε n,
- **μονότονη**, αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Για να εξετάσουμε αν μία ακολουθία $\{a_n\}$ είναι μονότονη μπορούμε εναλλακτικά να ελέγξουμε:

- Τον λόγο δύο διαδοχικών τιμών της (a_{n+1}/a_n). Αν αυτός είναι μεγαλύτερος του 1 για κάθε n, η $\{a_n\}$ είναι αύξουσα και αν είναι μικρότερος του 1 για κάθε n, η $\{a_n\}$ είναι φθίνουσα.
- Τη διαφορά δύο διαδοχικών τιμών της $(a_{n+1} - a_n)$. Αν αυτή είναι θετική για κάθε n, η $\{a_n\}$ είναι αύξουσα και αν είναι αρνητική για κάθε n, η $\{a_n\}$ είναι φθίνουσα.
- Το πρόσημο της παραγώγου της αντίστοιχης συνάρτησης. Αν η συνάρτηση προκύψει αύξουσα ή φθίνουσα, το ίδιο θα ισχύει και για την ακολουθία.

Αντίστοιχη συνάρτηση είναι η f με το κατάλληλο πεδίο ορισμού D (συνήθως $D = [0, \infty)$ ή $D = [1, \infty)$) και $f(n) = a_n$ για τις ακέραιες τιμές n του D.

Παράδειγμα 2-7

Η ακολουθία $\{a_n\}$ με
$$a_n = \frac{n}{n+1}\,, \qquad n \geq 1$$
είναι αύξουσα.

Οι πρώτοι όροι της είναι
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$$
και δείχνουν να μεγαλώνουν. Πρέπει όμως να το αποδείξουμε γενικά. Αν πάρουμε τον λόγο δύο διαδοχικών όρων της, έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n+1}{n+2}\,\frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)^2}{(n+2)n} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1\,, \quad \forall\, n\,.\end{aligned}$$

Επομένως $a_{n+1} > a_n$, για κάθε n. ■

Παράδειγμα 2-8

Η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ με

$$a_n = \frac{n}{n^2+1}$$

είναι φθίνουσα. Είναι εύκολο να το δούμε αυτό αν πάρουμε την αντίστοιχη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

ορισμένη στο $[1\,,\,\infty)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0\,, \quad \text{για } x > 1\,. \end{aligned}$$

Επομένως η f είναι φθίνουσα και το ίδιο και η $\{a_n\}$. ■

Παράδειγμα 2-9

Η ακολουθία $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ με

$$a_n = n^3 - 6n^2 + 9n$$

έχει αντίστοιχη συνάρτηση την

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x\,,$$

με παράγωγο το τριώνυμο

$$3x^2 - 12x + 9\,.$$

Οι ρίζες του τελευταίου είναι οι 1 και 3 και επομένως στο $(1\,,\,3)$ παίρνει αρνητικές τιμές (φθίνουσα συνάρτηση), ενώ για $x < 1$ και $x > 3$ θετικές (αύξουσα συνάρτηση). Έτσι και η $\{a_n\}$ είναι κατά διαστήματα αύξουσα ή φθίνουσα κι επομένως δεν είναι μονότονη.

■

2.1.4 Φραγμένες ακολουθίες

Έστω μία ακολουθία $\{a_n\}$.

- Αν υπάρχει ένας αριθμός m τέτοιος ώστε $m \leq a_n$ για κάθε n, η $\{a_n\}$ λέμε ότι είναι **φραγμένη κάτω** και ο m είναι ένα **κάτω φράγμα** της.

- Αν υπάρχει ένας αριθμός M τέτοιος ώστε $a_n \leq M$ για κάθε n, η $\{a_n\}$ λέμε ότι είναι **φραγμένη άνω** και ο M είναι ένα **άνω φράγμα** της.

- Αν η $\{a_n\}$ είναι και φραγμένη κάτω και φραγμένη άνω, λέμε ότι είναι **φραγμένη**.

Σε μία φραγμένη κάτω ακολουθία, με ένα κάτω φράγμα τον m, κάθε αριθμός μικρότερος του m είναι κι αυτός κάτω φράγμα της. Επομένως υπάρχουν άπειρα κάτω φράγματα. Από αυτά ξεχωρίζει το **ανώτερο κάτω φράγμα**. Αντίστοιχα σε μία φραγμένη άνω ακολουθία έχουμε το **κατώτερο άνω φράγμα**.

Παράδειγμα 2-10

Η ακολουθία $\{a_n\}$ που δίνεται από τον αναδρομικό τύπο

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \qquad (a_0 = \sqrt{2})$$

είναι φραγμένη.

Πράγματι το 0 είναι ένα κάτω φράγμα της, αφού όλες οι τιμές που παίρνει είναι θετικές. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι και φραγμένη άνω με ένα άνω φράγμα το 2: Έχουμε $a_0 = \sqrt{2} < 2$, $a_1 = \sqrt{2a_0} < 2$ επειδή $a_0 < 2$, $a_2 = \sqrt{2a_1} < 2$ επειδή $a_1 < 2$ κλπ. Η επιχειρηματολογία αυτή είναι ουσιαστικά μία απόδειξη με *μαθηματική επαγωγή* και τυπικά γίνεται ως εξής:

- Για $n = 0$ έχουμε
$$a_0 < 2 \ .$$

- Έστω ότι για $n = k$ είναι
$$a_k < 2 \ .$$
Τότε
$$\begin{aligned} 2\,a_k &< 4 \\ \Rightarrow \ \sqrt{2\,a_k} &< 2 \\ \Rightarrow \ a_{k+1} &< 2 \ . \end{aligned}$$
Δηλαδή αν η προς απόδειξη σχέση ισχύει για $n = k$, θα ισχύει και για $n = k + 1$.

- Αυτά αποδεικνύουν ότι για κάθε n

$$a_n < 2 \ .$$

■

Παράδειγμα 2-11

Η ακολουθία $\{a_n\}$ με

$$a_n = \frac{n}{n+1} \ , \qquad n \geq 1$$

είναι φραγμένη. Ένα κάτω φράγμα της είναι το 0, αφού παίρνει μόνο θετικές τιμές και ένα άνω φράγμα της το 1, αφού

$$\frac{n}{n+1} < 1 \, , \quad \forall \, n \, .$$

■

2.2 Μελέτη σύγκλισης ακολουθιών

2.2.1 Χρήση της αντίστοιχης συνάρτησης

Όταν μας δίνεται ο γενικός όρος μιας ακολουθίας μπορούμε συνήθως να πάρουμε την αντίστοιχη συνάρτηση και να ελέγξουμε το όριο του $f(x)$ για $x \to \infty$. Το ίδιο αποτέλεσμα θα έχουμε και για την ακολουθία όταν $n \to \infty$. Αν χρειαστεί μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του L' Hospital.

Παράδειγμα 2-12

Για την ακολουθία

$$a_n = \frac{4n^2 - 6}{7n^2 + 2n + 10}$$

έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 6}{7n^2 + 2n + 10} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(4 - \frac{6}{n^2})}{n^2(7 + \frac{2}{n} + \frac{10}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 - \frac{6}{n^2}}{7 + \frac{2}{n} + \frac{10}{n^2}} = \frac{4}{7} \ .$$

■

Παράδειγμα 2-13

Για την ακολουθία
$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$
έχουμε
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= 0\ .\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 2-14

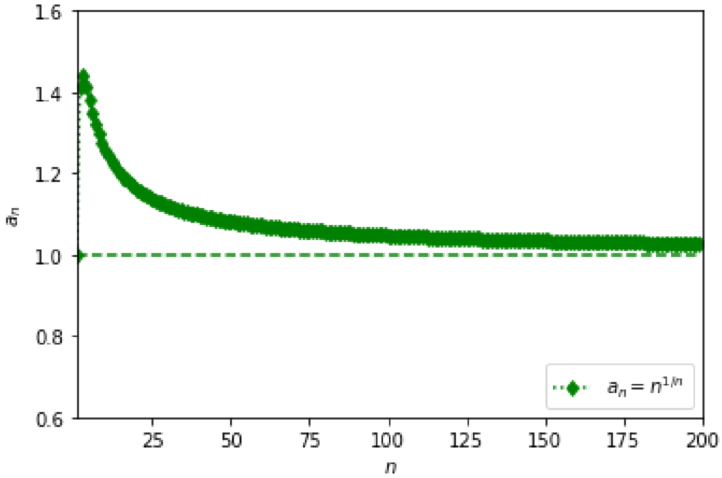
Για την ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ με
$$a_n = \frac{\ln n}{n}$$
παίρνουμε την αντίστοιχη συνάρτηση και εφαρμόζουμε τον κανόνα του L' Hospital:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0\ .$$
Επομένως
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0\ .$$

Ερ `limit ln(n)/n as n->infinity`

Απ $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n)}{n} = 0$

■

Παράδειγμα 2-15



Σχήμα 2.3: Η σύγκλιση της ακολουθίας με $a_n = \sqrt[n]{n}$

Για την

$$a_n = \sqrt[n]{n}$$

έχουμε

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} (e^{\ln x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1 \ ,$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε από το προηγούμενο παράδειγμα ότι $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$). Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad (\text{σχήμα } 2.3).$$

Ερ `limit n^(1/n) as n->infinity`

Απ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

■

2.2.2 Γεωμετρικές πρόοδοι

Μία ακολουθία που έχει έναν αρχικό όρο και κάθε επόμενος όρος της προκύπτει από το γινόμενο του προηγούμενου με έναν αριθμό r ονομάζεται **γεωμετρική πρόοδος**. Ο r λέγεται *λόγος* της γεωμετρικής προόδου.

Όπως και στην αντίστοιχη συνάρτηση, για την ακολουθία $\{a_n\}$ με

$$a_n = r^n \,, \qquad n \geq 0$$

(αρχικός όρος ίσος με 1) έχουμε ότι

- συγκλίνει για $-1 < r \leq 1$ με

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & -1 < r < 1 \\ 1, & r = 1 \end{cases}$$

- και αποκλίνει για κάθε άλλη τιμή του r.

Παράδειγμα 2-16

Η γεωμετρική πρόοδος με όρους

$$20, 10, 5, 2.5, 1.25, \ldots$$

έχει αρχικό όρο 20 και λόγο $1/2$. Επομένως συγκλίνει στο 0.

Ενώ αυτή με όρους

$$20, 40, 80, 160, 320, \ldots$$

έχει αρχικό όρο 20 και λόγο 2. Επομένως αποκλίνει στο ∞. ■

2.2.3 Μονότονη και φραγμένη ακολουθία

Ισχύει ότι:

- Αν μία ακολουθία είναι αύξουσα και φραγμένη άνω συγκλίνει.
- Αν μία ακολουθία είναι φθίνουσα και φραγμένη κάτω συγκλίνει.

Παράδειγμα 2-17

Η ακολουθία $\{a_n\}$ που δίνεται από τον αναδρομικό τύπο

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \qquad (a_0 = \sqrt{2})$$

είδαμε ότι είναι φραγμένη και ένα άνω φράγμα της είναι το 2. Για τον λόγο a_{n+1}/a_n έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{a_n}} > 1 \ ,$$

αφού είναι $a_n < 2$, για κάθε n. Συνεπώς η ακολουθία αυτή είναι και αύξουσα και επομένως συγκλίνει. *Επειδή το* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *υπάρχει*, η αναδρομική σχέση συνεπάγεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2 \lim_{n\to\infty} a_n}$$

και λύνοντας βρίσκουμε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2 \ ,$$

όπως είδαμε ήδη στο σχήμα 2.1. ■

2.2.4 Ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες

Αν έχουμε τρεις ακολουθίες a_n, b_n, c_n για τις οποίες ισχύει

- $b_n \leq a_n \leq c_n$, για κάθε n από μια τιμή και πάνω
- και $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$

τότε θα είναι και

- $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Παράδειγμα 2-18

Για την ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ με

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

έχουμε

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{n\cdot n\cdot n\cdots n} = \frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 3\cdots n}{n\cdot n\cdots n}\right) \ .$$

Ο όρος στην παρένθεση είναι μικρότερος ή ίσος του 1 και επειδή οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί έχουμε τελικά

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \ .$$

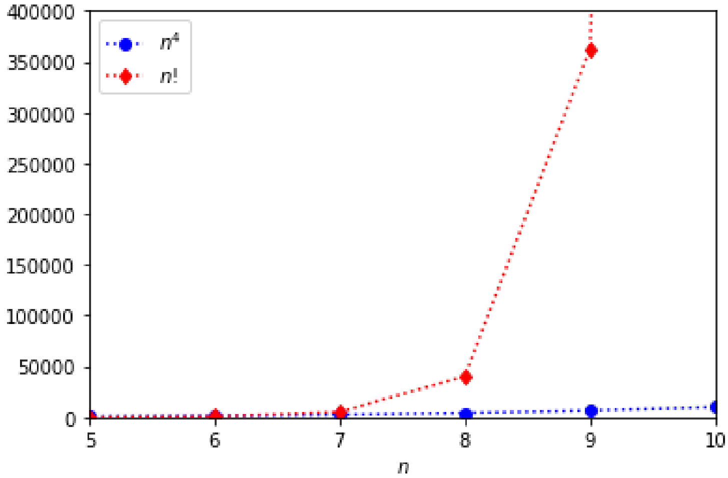
Επομένως, σύμφωνα με τα προηγούμενα (αφού $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$), θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \ .$$

Ερ `limit n!/(n^n) as n->infinity`

Απ $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

■



Σχήμα 2.4: Ο $n!$ και ο n^4 συναρτήσει του n

Παράδειγμα 2-19

Η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ με

$$a_n = \frac{n^3}{n!}$$

έχει επίσης όριο το 0. Ο $n!$ μεγαλώνει με το n πολύ πιο γρήγορα από τον n^3, το ίδιο και από τον n^4. Έτσι (όπως μπορούμε να ελέγξουμε με μερικούς υπολογισμούς ή με γραφική παράσταση) για $n \geq 7$ θα είναι

$$n! > n^4$$

(σχήμα 2.4) και επομένως

$$\frac{n^3}{n!} \leq \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n}$$

ή

$$0 \leq \frac{n^3}{n!} \leq \frac{1}{n}$$

και μπορεί να εφαρμοστεί πάλι το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών με όριο το 0.

Ερ `limit n^3/n! as n->infinity`

Απ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n!} = 0$

■

2.2.5 Η περίπτωση όπου $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

Ισχύει ότι

- αν $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ τότε και $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Παράδειγμα 2-20

Η ακολουθία

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

έχει όρους με εναλλασσόμενα πρόσημα αλλά συγκλίνει στο 0 αφού

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ .$$

Ερ `limit (−1)^n/n as n->infinity`

Απ $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

■

Αν το όριο της $|a_n|$ είναι *διαφορετικό από το* 0 *δεν έχουμε αντίστοιχη σχέση.*

Κεφάλαιο 3

Σειρές

3.1 Τι είναι οι σειρές

Όταν έχουμε ένα άθροισμα άπειρων όρων μπορεί

- να μεγαλώνει η τιμή του απεριόριστα, όπως το

$$1 + 1 + 1 + 1 + \dots ,$$

- να παίρνει εναλλασσόμενες τιμές, όπως το

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

- ή να πλησιάζει (όσο περισσότερους όρους παίρνουμε) όλο και περισσότερο σε μια συγκεκριμένη τιμή, όπως το

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots ,$$

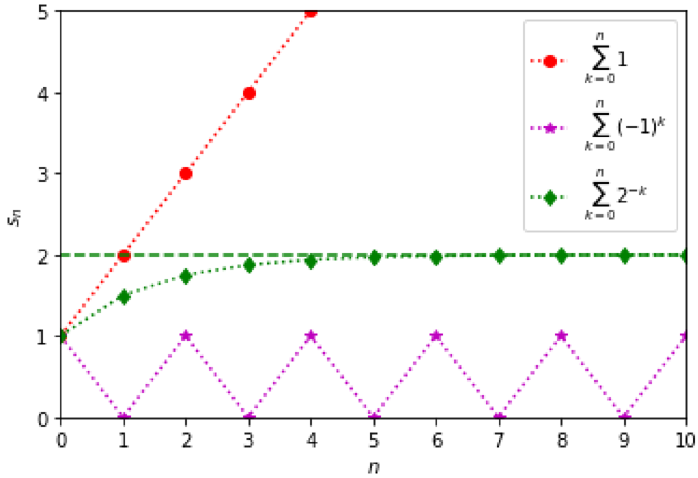
  που προσεγγίζει τον αριθμό 2.

Αθροίσματα όπως αυτά ονομάζονται **σειρές** και συμβολίζονται

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ ,$$

όπου a_n *είναι οι όροι μιας ακολουθίας* $\{a_n\}$.

Στα δύο πρώτα παραδείγματα ($a_n = 1\,, \forall\ n$ και $a_n = (-1)^n$) έχουμε σειρές που **αποκλίνουν**, ενώ στο τρίτο ($a_n = (1/2)^n$) η σειρά **συγκλίνει** (σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1: Δύο αποκλίνουσες σειρές και μία συγκλίνουσα

Ερ `sum (-1)^n, n = 0..infinity`

Απ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ (sum does not converge)

Ερ `sum (1/2)^n, n = 0..infinity`

Απ $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$

Ουσιαστικά μία σειρά συγκλίνει ή δεν συγκλίνει αναλόγως του τι κάνει η **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων** της, η $\{s_n\}$, που είναι η ακολουθία με όρους

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{aligned}$$

Όταν η $\{s_n\}$ συγκλίνει, το όριό της ονομάζεται **άθροισμα** της σειράς.

Με κάθε σειρά επομένως συνδέονται 2 ακολουθίες: Η ακολουθία των όρων της $\{a_n\}$ και η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\{s_n\}$.

Ο πρώτος όρος μιας σειράς δεν είναι ανάγκη να έχει δείκτη τον $n = 0$. Συνηθισμένο είναι να ξεκινάμε και από τον a_1 και γενικά μπορεί μια σειρά να ξεκινάει από οποιαδήποτε τιμή του n.

Οι συμβολισμοί

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}$$

μας δίνουν την ίδια σειρά, όπως φαίνεται αμέσως με την ανάπτυξη των αθροισμάτων. Γενικά, αν ο κάτω δείκτης του αθροίσματος είναι ο n_0, μπορούμε να τον κάνουμε $n_0 \pm k$ αρκεί να αλλάξει και ο γενικός όρος από a_n σε $a_{n\mp k}$.

3.2 Ιδιότητες σύγκλισης

Αν οι σειρές $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ συγκλίνουν, τότε συγκλίνουν και οι

- $\sum_n c a_n$ (c, σταθερά), με άθροισμα ίσο με $c \sum_n a_n$,
- $\sum_n (a_n \pm b_n)$, με άθροισμα ίσο με $\sum_n a_n \pm \sum_n b_n$.

Αν μια σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει, το ίδιο θα κάνει και η σειρά που προκύπτει από αυτήν αν παραλείψουμε τους k πρώτους όρους της. Δηλαδή η σειρά με πρώτον όρο τον a_{k+1} (αν η αρχική ξεκινούσε από τον a_1). Στην περίπτωση σύγκλισης το άθροισμα βέβαια θα αλλάζει:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1 \ .$$

Αντίστοιχα, η προσθήκη ενός πεπερασμένου αριθμού όρων δεν επηρεάζει την σύγκλιση ή απόκλιση μιας σειράς.

3.3 Γεωμετρικές σειρές

Μία σειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\, r^n \ ,$$

που είναι το άθροισμα των άπειρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο τον c και λόγο r, ονομάζεται **γεωμετρική σειρά**.

Το μερικό άθροισμα μιας γεωμετρικής σειράς υπολογίζεται εύκολα ως εξής: Έχουμε

$$\begin{aligned} s_n &= c + cr + cr^2 + \ldots + cr^n \\ r s_n &= cr + cr^2 + \ldots + cr^n + cr^{n+1} \ , \end{aligned}$$

οπότε αφαιρούμε από την πρώτη εξίσωση τη δεύτερη και προκύπτει

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} c\, r^k = c\, \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \ .$$

Επομένως, παίρνοντας το όριο $\lim_{n\to\infty} s_n$, καταλήγουμε ότι μία γεωμετρική σειρά

- συγκλίνει για $|r| < 1$, οπότε έχει άθροισμα

$$\frac{c}{1 - r} \ ,$$

- αποκλίνει για $|r| \geq 1$.

Παράδειγμα 3-1

Περιοδικός δεκαδικός αριθμός:

$$\begin{aligned} 0.1111\ldots &= 0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots \\ &= \left(\frac{1}{10}\right)^1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n - 1 \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \\ &= \frac{10}{9} - 1 \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 3-2

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}} &= \frac{3}{5^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n \\ &= \frac{3}{5^2}\frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{3}{5^2}\frac{5}{2} \\ &= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

Ερ `sum 3^(n + 1)/5^(n + 2), n = 0..infinity`

Απ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}} = \frac{3}{10}$

■

3.4 Τηλεσκοπικές σειρές

Μία σειρά λέγεται **τηλεσκοπική** όταν, αναπτύσσοντάς το μερικό άθροισμα, οι περισσότεροι όροι του αλληλοεξουδετερώνονται και μένουν μόνο κάποιοι στην αρχή και στο τέλος. Τότε υπολογίζεται εύκολα το όριό του και συμπεραίνεται το αν η σειρά συγκλίνει και σε ποιο άθροισμα.

Όταν η ακολουθία $\{a_n\}$, των όρων μιας σειράς, προκύπτει από τις διαφορές των διαδοχικών όρων μιας άλλης ακολουθίας ($a_n = b_n - b_{n+1}$), η σειρά είναι τηλεσκοπική.

Παράδειγμα 3-3

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\dots \\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

και το μερικό άθροισμα είναι

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \ , \end{aligned}$$

οπότε $s_N \to 1$ για $N \to \infty$, δηλαδή η σειρά συγκλίνει με άθροισμα 1.

Ερ `sum 1/(n(n + 1)), n = 1..infinity`

Απ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

(Στο παράδειγμα αυτό το ότι

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

είναι σχεδόν προφανές. Αν ακολουθούσαμε την καθιερωμένη διαδικασία της *ανάλυσης σε μερικά κλάσματα* θα γράφαμε

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \ ,$$

οπότε θα έπρεπε

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)}$$

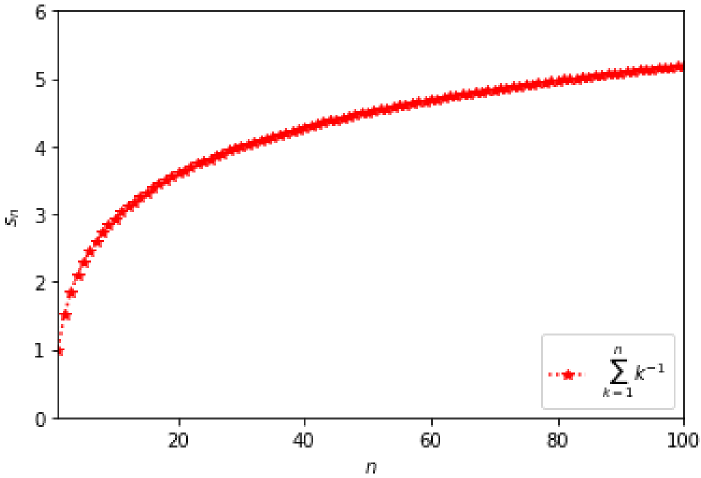
και επομένως $A = 1$ και $B = -1$.) ■

3.5 Σειρές p

Σειρές p ονομάζονται οι σειρές της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots \ ,$$

όπου ο p είναι θετικός. Αποδεικνύεται ότι μία σειρά p



Σχήμα 3.2: Η απόκλιση της αρμονικής σειράς

- συγκλίνει για $p > 1$,
- αποκλίνει για $p \leq 1$.

Για $p = 1$ παίρνουμε την λεγόμενη **αρμονική σειρά**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \ ,$$

η οποία αποκλίνει (σχήμα 3.2).

Ερ `sum 1/n, n = 1..infinity`

Απ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ `(sum diverges)`

3.6 Κριτήρια σύγκλισης σειρών

Ο υπολογισμός του αθροίσματος μιας σειράς είναι γενικά δύσκολος. Έχει όμως ενδιαφέρον να γνωρίζουμε τουλάχιστον αν αυτό το άθροισμα υπάρχει, δηλαδή αν η σειρά συγκλίνει ή όχι.

3.6.1 Η αναγκαία συνθήκη σύγκλισης

Αν οι όροι μιας σειράς δεν γίνονται όλο και μικρότεροι, καταλαβαίνουμε ότι αποκλείεται η σειρά αυτή να συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι

- αν η σειρά $\sum_n a_n$ συγκλίνει, τότε για την ακολουθία $\{a_n\}$ ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ .$$

(Για να το αποδείξουμε αυτό παρατηρούμε ότι, αφού η σειρά συγλίνει σε κάποιο άθροισμα L, θα είναι:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = L$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = L \ ,$$

οπότε αφαιρώντας:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0 \ .)$$

Η συνθήκη είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή. Έτσι ενώ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ ,$$

η αντίστοιχη γεωμετρική σειρά, όπως είδαμε, συγκλίνει και

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \ ,$$

ενώ η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

είναι η αρμονική σειρά, που αποκλίνει.

Μπορούμε να δούμε τη συνθήκη αυτή και ως *ικανή συνθήκη απόκλισης*:

- Αν $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, η σειρά $\sum_n a_n$ αποκλίνει.

Έχουμε επίσης *έναν ακόμη τρόπο να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία a_n συγκλίνει στο* 0: Αρκεί να δείξουμε (με ένα από τα κριτήρια παρακάτω) ότι η αντίστοιχη σειρά $\sum_n a_n$ είναι συγκλίνουσα.

3.6.2 Απόλυτη και υπό συνθήκη σύγκλιση

Μία σειρά $\sum_n a_n$ λέμε ότι **συγκλίνει απολύτως**, αν συγκλίνει η σειρά $\sum_n |a_n|$. Ισχύει ότι:

- Αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και απλά. Δηλαδή, αν συγκλίνει η $\sum_n |a_n|$, το ίδιο κάνει και η $\sum_n a_n$.
- Μία σειρά $\sum_n a_n$ μπορεί να συγκλίνει ενώ η $\sum_n |a_n|$ αποκλίνει. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η $\sum_n a_n$ **συγκλίνει υπό συνθήκη**.

Παράδειγμα 3-4

Η (**εναλλασσόμενη αρμονική**) σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

συγκλίνει υπό συνθήκη γιατί, όπως θα δούμε, έχει άθροισμα $\ln 2$, ενώ η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

είναι η αρμονική σειρά και αποκλίνει. ■

3.6.3 Κριτήριο σύγκρισης

Έστω ότι έχουμε δύο σειρές $\sum_n a_n$ και $\sum_n b_n$ με $a_n, b_n \geq 0$ και

$$a_n \leq b_n \ ,$$

για κάθε n από μιά τιμή και πάνω. Τότε

- αν η $\sum_n b_n$ συγκλίνει, το ίδιο κάνει και η $\sum_n a_n$,
- αν η $\sum_n a_n$ αποκλίνει, το ίδιο κάνει και η $\sum_n b_n$.

(Αν η σειρά με τους μεγαλύτερους όρους $\sum_n b_n$ αποκλίνει, δεν βγαίνει συμπέρασμα για την $\sum_n a_n$. Αντίστοιχα, αν η $\sum_n a_n$ συγκλίνει, δεν βγαίνει συμπέρασμα για την $\sum_n b_n$.)

Παράδειγμα 3-5

Η απόκλιση της αρμονικής σειράς: Θα συγκρίνουμε την αρμονική σειρά

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots$$

με την

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\dots$$

Η τελευταία έχει όρους που είναι μικρότεροι ή ίσοι αυτών της αρμονικής και αποκλίνει, αφού στην ουσία είναι

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots$$

Επομένως η αρμονική σειρά επίσης αποκλίνει. ■

Παράδειγμα 3-6

Η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}+n^2}$$

συγκλίνει, αφού

$$\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}+n^2}\leq\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}$$

και η $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}$ είναι, όπως είδαμε, μια γεωμετρική σειρά που συγκλίνει.

Ερ `sum 3^(n + 1)/(5^(n + 2) + n^2), n = 0..infinity`

Απ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{n^2+5^{n+2}}=0.29906$

■

Βλέπουμε στο τελευταίο παράδειγμα ότι, για να βρούμε τη σειρά με την οποία θα συγκρίνουμε, δοκιμάζουμε κρατώντας από την σειρά μας τους κυρίαρχους όρους στον αριθμητή και τον παρονομαστή. Το ίδιο κάνουμε και στο επόμενο κριτήριο.

3.6.4 Οριακό κριτήριο σύγκρισης

- Έστω ότι έχουμε δύο σειρές $\sum_n a_n$ και $\sum_n b_n$ με $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ για κάθε n. Τότε αν το όριο
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$
είναι θετικό και πεπερασμένο, είτε και οι δύο σειρές συγκλίνουν είτε και οι δύο αποκλίνουν.

Παράδειγμα 3-7

Για τη σειρά
$$\sum_n b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^{n+2} - n^2}$$
δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το απλό κριτήριο σύγκρισης όπως πριν, αφού τώρα
$$\frac{3^{n+1}}{5^{n+2} - n^2} \geq \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}} \ ,$$
δηλαδή οι όροι της είναι μεγαλύτεροι από της γεωμετρικής σειράς $\sum_n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}$, που ξέρουμε ότι συγκλίνει. Επειδή όμως το 5^{n+2} μεγαλώνει πολύ πιο γρήγορα από το n^2, περιμένουμε να έχουμε πάλι σύγκλιση. Το νέο κριτήριο μας το επιβεβαιώνει, αφού
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}} \ \frac{5^{n+2} - n^2}{3^{n+1}} \right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+2} - n^2}{5^{n+2}} \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5^{n+2}} \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{5^{n+2}(\ln 5)} \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{5^{n+2}(\ln 5)^2} \\
&= 1 - 0 \\
&= 1 > 0 \ .
\end{aligned}$$

Ερ `sum 3^(n + 1)/(5^(n + 2) − n^2), n = 0..infinity`

Απ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}-n^2} = 0.300953$

■

3.6.5 Κριτήριο λόγου

Έστω η σειρά $\sum_n a_n$. Για να πάρουμε το κριτήριο του λόγου εξετάζουμε το όριο

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \ .$$

- Αν $L < 1$, η σειρά συγκλίνει.
- Αν $L > 1$, η σειρά αποκλίνει.
- Αν $L = 1$, δεν μπορεί να εξαχθεί συμπέρασμα.

Παράδειγμα 3-8

Για τη σειρά

$$\sum_n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \ ,$$

δηλαδή την

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \ ,$$

έχουμε

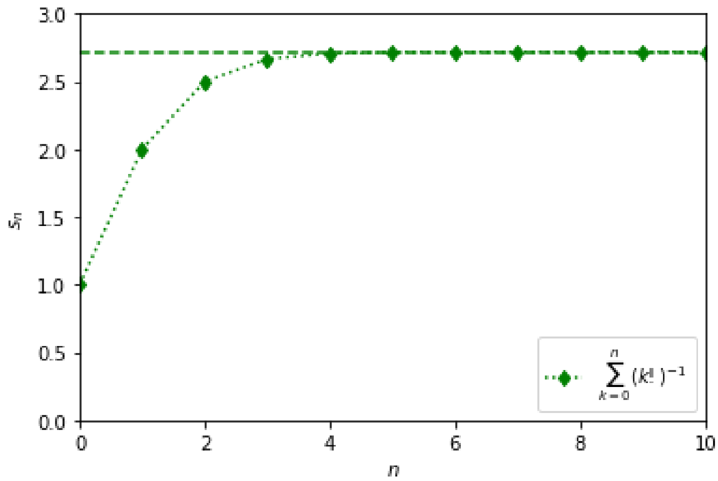
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!}\, n! \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \ .$$

Επομένως η σειρά συγκλίνει. Θα δούμε στα επόμενα (παράδειγμα 4-7) ότι το άθροισμά της είναι ο αριθμός e (σχ. 3.3).

Ερ `sum 1/n!, n = 0..infinity`

Απ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

■



Σχήμα 3.3: Η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ στον $e \approx 2.72$

3.6.6 Κριτήριο ρίζας

Για το κριτήριο της ρίζας εξετάζουμε το

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ .$$

- Αν $L < 1$, η σειρά συγκλίνει.
- Αν $L > 1$, η σειρά αποκλίνει.
- Αν $L = 1$, δεν μπορεί να εξαχθεί συμπέρασμα.

Παράδειγμα 3-9

Για τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n}$$

έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = \infty \ .$$

Επομένως η σειρά αποκλίνει.

Ερ `sum n^n/2^n, n = 1..infinity`

Απ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n}$ (sum does not converge)

■

3.6.7 Κριτήριο για εναλλασσόμενες σειρές

Έστω μία σειρά $\sum_n a_n$ της οποίας οι όροι είναι εναλλάξ θετικοί και αρνητικοί. Τότε αν:

- $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ και
- η ακολουθία $\{|a_n|\}$ είναι φθίνουσα,

η $\sum_n a_n$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 3-10

Η σειρά (εναλλασσόμενη αρμονική)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

συγκλίνει (σχ. 3.4), επειδή η ακολουθία

$$\left\{ \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| \right\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

έχει όριο το 0 και είναι φθίνουσα.

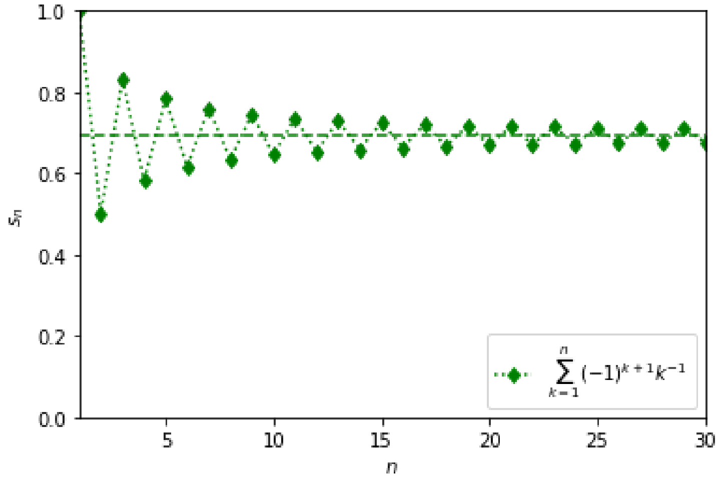
Ερ `sum (-1)^(n + 1)/n, n = 1..infinity`

Απ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(2)$

■

3.7 Μεθοδολογία - Σύνοψη

- Αν $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (ή το όριο δεν υπάρχει), η αντίστοιχη σειρά αποκλίνει.



Σχήμα 3.4: Η σύγκλιση της εναλλασσόμενης αρμονικής σειράς στον $\ln 2 \approx 0.69$ (ενότητα 4.2)

- Αν η σειρά είναι της μορφής (ή μπορεί να έρθει μετά από κάποιες πράξεις στη μορφή) $\sum_n cr^n$ ή $\sum_n cr^{n-1}$, είναι γεωμετρική σειρά, οπότε συγκλίνει για $|r| < 1$ και αποκλίνει για $|r| \geq 1$.

- Αν η σειρά είναι της μορφής $\sum_n (1/n^p)$, είναι σειρά p, οπότε συγκλίνει για $p > 1$ και αποκλίνει για $p \leq 1$.

- Αν η σειρά έχει παρόμοια μορφή με μία γεωμετρική σειρά ή με μία σειρά p, πρέπει να εξεταστεί με ένα από τα κριτήρια σύγκρισης. Ειδικά αν οι όροι της σειράς είναι ρητές ή αλγεβρικές συναρτήσεις του n, η σειρά πρέπει να συγκριθεί με μία σειρά p. Για να βρούμε την τιμή του p κρατάμε μόνο τις υψηλότερες δυνάμεις στον αριθμητή και τον παρονομαστή. Επειδή τα κριτήρια σύγκρισης εφαρμόζονται μόνο σε σειρές με θετικούς όρους, αν η σειρά μας έχει και αρνητικούς ελέγχουμε το ενδεχόμενο της απόλυτης σύγκλισης.

- Αν η σειρά περιλαμβάνει παραγοντικά ή άλλα γινόμενα, δοκιμάζουμε το κριτήριο του λόγου.

- Αν οι όροι της σειράς έχουν τη μορφή $a_n = (b_n)^n$, δοκιμάζουμε το κριτήριο της ρίζας.

- Αν οι όροι της σειράς έχουν τη μορφή $a_n = (-1)^n b_n$, δοκιμάζουμε το κριτήριο για τις εναλλασσόμενες σειρές.

- Στο κεφάλαιο για τα γενικευμένα ολοκληρώματα θα δούμε και το κριτήριο του ολοκληρώματος για τη σύγκλιση σειρών.

Κεφάλαιο 4

Δυναμοσειρές

4.1 Γενικά

Μία σειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

ονομάζεται **δυναμοσειρά** ή **σειρά δυνάμεων**. Οι a_n είναι σταθεροί αριθμοί και ο x είναι μεταβλητή. Το άθροισμά της, αν υπάρχει, είναι συνάρτηση του x. Μπορούμε επίσης να πούμε ότι μια δυναμοσειρά είναι σαν ένα πολυώνυμο άπειρου βαθμού.

Γενικότερα, έχουμε δυναμοσειρές γύρω από κάποιο σημείο x_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots$$

(Δηλαδή η προηγούμενη απλούστερη μορφή δυναμοσειράς είναι γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.)

Για μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ισχύει ότι *τρία ενδεχόμενα υπάρχουν*:

- Συγκλίνει μόνο για $x = x_0$.
- Συγκλίνει για κάθε x.
- Συγκλίνει για $|x-x_0| < R$ και αποκλίνει για $|x-x_0| > R$, όπου R ένας συγκεκριμένος θετικός αριθμός που ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς. (Στα δύο πρώτα ενδεχόμενα λέμε ότι $R = 0$ και $R = \infty$ αντίστοιχα.)

Το **διάστημα σύγκλισης** μίας δυναμοσειράς είναι αυτό που περιέχει τα σημεία x για τα οποία αυτή συγκλίνει, δηλαδή είναι οπωσδήποτε το ανοιχτό διάστημα

$$(x_0 - R\,,\, x_0 + R)$$

μαζί ενδεχομένως και με ένα ή και τα δύο άκρα του, $x_0 - R$ και $x_0 + R$, για τα οποία το προηγούμενο θεώρημα δεν μας λέει τι συμβαίνει και συνεπώς πρέπει να εξετάζονται χωριστά.

Η εξέταση της σύγκλισης των δυναμοσειρών γίνεται γενικά με το κριτήριο του λόγου ή και αυτό της ρίζας. (Στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης αυτά τα κριτήρια δεν οδηγούν σε συμπέρασμα.)

Παράδειγμα 4-1

Για την δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{|(-2)^{n+1}x^{n+1}|}{\sqrt{n+2}} \frac{\sqrt{n+1}}{|(-2)^n x^n|} \\ &= 2\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}|x| \to 2|x| \ \text{ για } \ n \to \infty\ .\end{aligned}$$

Επομένως συγκλίνει για $2|x| < 1$ ή για $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, δηλαδή η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1/2$. Στο άκρο $x = -1/2$ η σειρά γίνεται

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}\ ,$$

η οποία αποκλίνει επειδή είναι η σειρά p για $p = 1/2$. Στο άλλο άκρο $x = 1/2$ παίρνουμε την

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\ ,$$

η οποία συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο για εναλλασσόμενες σειρές. Επομένως το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς μας είναι το $\left(-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right]$. ■

Παράδειγμα 4-2

Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

συγκλίνει στο $(-\infty\,,\,\infty)$, δηλαδή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Έχουμε πράγματι

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}\right| \\ &= \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1 \text{ για } n \to \infty\,,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

Θα δούμε ότι αυτή η δυναμοσειρά συγκλίνει στην συνάρτηση e^x. ■

4.2 Η γεωμετρική δυναμοσειρά – Αναπτύγματα συναρτήσεων

Οι γεωμετρικές σειρές του προηγούμενου κεφαλαίου προκύπτουν από την **γεωμετρική δυναμοσειρά**

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\ ,$$

για διάφορες τιμές του x (και πολλαπλασιάζοντας ενδεχομένως με μία σταθερά). Η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει για

$$|x| < 1 \quad (\text{δηλαδή έχει διάστημα σύγκλισης το } (-1,1)\,)$$

και τότε έχουμε

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots$$

Βλέπουμε ότι *στο διάστημα σύγκλισης έχουμε αναπτύξει*, όπως λέμε, *την συνάρτηση* $1/(1-x)$ *σε μία δυναμοσειρά*.

Με βάση αυτό το ανάπτυγμα μπορούμε να αναπτύξουμε και άλλες συναρτήσεις. Ενδεικτικά:

- Με αντικατάσταση του x με $-x$ παίρνουμε

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\ .$$

- Με αντικατάσταση του x με $2x$

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \ .$$

- Με αντικατάσταση του x με x^2

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \ .$$

- Με πολλαπλασιασμό επί x της τελευταίας

$$\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \ .$$

Επιτρέπεται η παραγώγιση και η ολοκλήρωση μιας δυναμοσειράς όρο προς όρο. Η ακτίνα σύγκλισης σε αυτές τις περιπτώσεις παραμένει η ίδια. (Στα άκρα του διαστήματος μπορεί όμως να έχουμε μεταβολές ως προς την σύγκλιση.) Από τη γεωμετρική σειρά παίρνουμε

- με παραγώγιση

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

- και με ολοκλήρωση

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1-x} &= \int (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) dx \\ &= C + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots \end{aligned}$$

  ή

$$-\ln(1-x) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \ .$$

  Για την σταθερά προκύπτει $C = 0$, αφού για $x = 0$ παίρνουμε $-\ln 1 = C$ και επομένως

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \ .$$

  Θέτοντας $x = -1$ παίρνουμε το άθροισμα της εναλλασσόμενης αρμονικής σειράς

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

(Μπορούμε να θέσουμε το x ίσο με -1 επειδή η σειρά αυτή μπορεί να αποδειχθεί ότι συγκλίνει και στο ακραίο σημείο -1, παρά το ότι αυτό δεν ισχύει για τη γεωμετρική σειρά που ολοκληρώσαμε.)

> **Ερ** `taylor series ln(1 − x)`
>
> **Απ** $-\mathtt{x} - \frac{\mathtt{x}^2}{2} - \frac{\mathtt{x}^3}{3} - \frac{\mathtt{x}^4}{4} - \frac{\mathtt{x}^5}{5} - \frac{\mathtt{x}^6}{6} + \mathtt{O}(\mathtt{x}^7)$
> (converges when $|\mathtt{x}| \leq 1 \wedge \mathtt{x} \neq 1$)

Παράδειγμα 4-3

Θα αναπτύξουμε σε δυναμοσειρά την συνάρτηση $1/(x+5)$:

$$\frac{1}{x+5} = \frac{1}{5\left(1+\frac{x}{5}\right)} = \frac{1}{5\left[1-\left(-\frac{x}{5}\right)\right]}$$
$$= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}x^n$$

Για να συγκλίνει θα πρέπει $|-x/5| < 1$ κι επομένως το διάστημα σύγκλισης θα είναι το $(-5, 5)$.

> **Ερ** `taylor series 1/(x + 5)`
>
> **Απ** $\frac{1}{5} - \frac{\mathtt{x}}{25} + \frac{\mathtt{x}^2}{125} - \frac{\mathtt{x}^3}{625} + \frac{\mathtt{x}^4}{3125} - \frac{\mathtt{x}^5}{15625} + \mathtt{O}(\mathtt{x}^6)$
> (converges when $|\mathtt{x}| < 5$)

■

Παράδειγμα 4-4

Θα αναπτύξουμε σε δυναμοσειρά την συνάρτηση $\tan^{-1} x$ ξεκινώντας από τη γνώση της παραγώγου της. Έχουμε:

$$(tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

και επομένως

$$\begin{aligned}\tan^{-1} x &= \int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1-(-x^2)}dx \\ &= \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots)dx \\ &= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\end{aligned}$$

Η σταθερά θα είναι $C = 0$, αφού $\tan^{-1} 0 = 0$, οπότε

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \ .$$

Η ακτίνα σύγκλισης θα είναι ίδια με της $1/(1+x^2)$, δηλαδή $R = 1$, αφού πρέπει $|-x^2| < 1$.

(Μπορεί να αποδειχθεί ότι το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1\,,\,1]$, δηλαδή περιλαμβάνει και τα ακραία σημεία -1 και 1. Επειδή $\tan^{-1} 1 = \pi/4$ προκύπτει ο λεγόμενος τύπος του Leibniz για το π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

)

Ερ `taylor series arctan(x)`

Απ $\mathtt{x} - \frac{\mathtt{x}^3}{3} + \frac{\mathtt{x}^5}{5} - \frac{\mathtt{x}^7}{7} + \mathtt{O}(\mathtt{x}^9)$

■

4.3 Σειρές Taylor και Maclaurin

Πώς υπολογίζεται η τιμή συναρτήσεων όπως η $\sin x$ για οποιαδήποτε τιμή του x και με οσηδήποτε ακρίβεια θέλουμε; Η απάντηση βρίσκεται στο ότι ισχύει

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad , \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή η συνάρτηση αυτή αναπτύσσεται σε μία δυναμοσειρά, η οποία συγκλίνει σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Στην προηγούμενη ενότητα είχαμε αναπτύγματα συναρτήσεων που προέκυψαν από την γεωμετρική σειρά. Γενικά όμως *αν έχουμε μια* *συνάρτηση f ενδέχεται να ισχύει*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ή γενικότερα

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \ .$$

Αν ισχύει η τελευταία σχέση λέμε ότι η f αναπτύσσεται σε μία **σειρά Taylor γύρω από το $\mathbf{x_0}$**. Στην ειδική περίπτωση όπου $x_0 = 0$ έχουμε μία **σειρά Maclaurin** (προτελευταία σχέση).

4.3.1 Πώς αναπτύσσεται μια συνάρτηση σε δυναμοσειρά

Ο υπολογισμός των συντελεστών a_n γίνεται ως εξής: Παραγωγίζοντας k φορές τη σχέση με το ανάπτυγμα Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ ,$$

θα έχουμε στο αριστερό μέλος την $f^{(k)}(x)$, ενώ στο δεξί ο όρος με $n = k$, δηλαδή ο $a_k x^k$, θα γίνει

$$[k(k-1)(k-2)\ldots 1]\, a_k x^0 = k!\, a_k \ .$$

Οι όροι με $n < k$ δεν θα υπάρχουν πια, ενώ για $n > k$ θα έχουμε τους $a_{k+1}x$, $a_{k+2}x^2$, ... Αν πάρουμε $x = 0$ όμως, όλοι αυτοί οι τελευταίοι θα μηδενιστούν και θα καταλήξουμε στη σχέση

$$f^{(k)}(0) = k!\, a_k \ .$$

Οι συντελεστές του αναπτύγματος Maclaurin επομένως θα είναι

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \ .$$

Για το ανάπτυγμα Taylor βρίσκουμε αντίστοιχα

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \ .$$

Παίρνουμε λοιπόν τελικά τους τύπους

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \text{(Taylor)}$$

και

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad \text{(Maclaurin).}$$

4.3.2 Πότε αναπτύσσεται μια συνάρτηση σε δυναμοσειρά

Για να μπορεί μία συνάρτηση f να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor ή Maclaurin (δηλαδή για να ισχύουν οι προηγούμενοι τύποι) θα πρέπει

- να έχει παραγώγους κάθε τάξης στο $x = x_0$,
- το ανάπτυγμα να συγκλίνει για όλα τα x που ανήκουν σε ένα διάστημα μη εκφυλισμένο στο $x = x_0$ και
- η τιμή στην οποία το ανάπτυγμα συγκλίνει να είναι για κάθε x ίση με $f(x)$.

Μία τέτοια συνάρτηση ονομάζεται **αναλυτική**.

Όταν θέλουμε νε προσεγγίσουμε την τιμή μιας αναλυτικής συνάρτησης χρησιμοποιώντας την σειρά Taylor παίρνουμε το μερικό άθροισμα, που εδώ συμβολίζεται T_n αντί για s_n και ονομάζεται **πολυώνυμο Taylor βαθμού n της f στο x$_0$**:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \ .$$

Θα είναι $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)$ και όσο μεγαλύτερο n πάρουμε τόσο καλύτερη προσέγγιση θα έχουμε. Αυτό κάνουμε στο παράδειγμα με το $\sin x$ που αναφέρθηκε στην αρχή αυτής της ενότητας.

Για μία τυχαία συνάρτηση f ορίζουμε το **υπόλοιπο Taylor** $R_n(x)$ ως την διαφορά της από το πολυώνυμο $T_n(x)$:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

και ισχύει ότι

- αν
$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$
για $|x - x_0| < R$, τότε η f αναπτύσσεται σε σειρά Taylor γύρω από το x_0 για κάθε x στο διάστημα $(x_0 - R\,,\, x_0 + R)$.

Ένας τύπος για το υπόλοιπο είναι ο εξής (που λέγεται **μορφή Lagrange του υπολοίπου**):

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \ ,$$

όπου το c είναι ένα σημείο μεταξύ του x και του x_0. Η $f^{(n+1)}$ πρέπει να είναι συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα που να περιέχει το x_0 και το x να ανήκει στο διάστημα αυτό.

4.3.3 Παραδείγματα

Παράδειγμα 4-5

Η $f(x) = \sin x$ έχει υπόλοιπο Taylor (ακριβέστερα: Maclaurin)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

με

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \ ,$$

αφού για κάθε n θα είναι $f^{(n+1)}(c) = \pm \sin c$ ή $\pm \cos c$ και σε κάθε περίπτωση $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$. Δηλαδή έχουμε

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \ .$$

Επειδή, όπως μπορεί να αποδειχθεί εύκολα,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \ ,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει από το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών ότι $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ και τελικά

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \ .$$

Επομένως η συνάρτηση $\sin x$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για τους συντελεστές του αναπτύγματος έχουμε:

$$\frac{f^{(0)}(0)}{0!} = \frac{\sin 0}{1} = 0$$
$$\frac{f^{(1)}(0)}{1!} = \frac{\cos 0}{1} = 1$$
$$\frac{f^{(2)}(0)}{2!} = \frac{-\sin 0}{2!} = 0$$
$$\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{-\cos 0}{3!} = -\frac{1}{3!}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Οι παράγωγοι άρτιας τάξης μηδενίζονται στο 0, ενώ αυτές περιττής τάξης παίρνουν εναλλάξ τις τιμές 1 και -1. Έτσι παίρνουμε:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} .$$

■

Παράδειγμα 4-6

Η συνάρτηση $\cos x$ επίσης αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά και το ανάπτυγμά της Maclaurin μπορεί να υπολογιστεί με την ίδια διαδικασία. Ένας πιο γρήγορος τρόπος είναι το να παραγωγίσουμε τη δυναμοσειρά του $\sin x$:

$$\cos x = (\sin x)' = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \ldots$$

ή

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} .$$

Το διάστημα σύγκλισης είναι πάλι ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι το ανάπτυγμα της $\cos x$, ως άρτιας συνάρτησης, περιέχει μόνο άρτιες δυνάμεις του x, όπως αντίστοιχα το ανάπτυγμα της $\sin x$ περιέχει μόνο περιττές.

Ερ `taylor series cos(x)`

Απ $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + O(x^8)$

■

Παράδειγμα 4-7

Για το ανάπτυγμα της $f(x) = e^x$, το οποίο μπορεί να αποδειχθεί ότι συγκλίνει στη συνάρτηση αυτή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, έχουμε:

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad \text{και} \qquad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!} \ ,$$

για κάθε n. Επομένως το ανάπτυγμα Maclaurin θα είναι:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ .$$

Θέτοντας $x = 1$ παίρνουμε το άθροισμα της σειράς του παραδείγματος 3-8:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

■

Συναρτήσεις, όπως αυτές των παραδειγμάτων, που αναπτύσσονται σε δυναμοσειρές ενώ δεν είναι πολυώνυμα (δηλαδή είναι σαν πολυώνυμα άπειρου βαθμού) ονομάζονται **υπερβατικές συναρτήσεις**.

Το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά μιας συνάρτησης μας αρκεί σε πολλές περιπτώσεις που δεν μπορούμε να έχουμε την ίδια τη συνάρτηση. Μία τέτοια περίπτωση είναι ο υπολογισμός αόριστων ολοκληρωμάτων που δεν αντιστοιχούν σε στοιχειώδεις συναρτήσεις, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 4-8

Θα βρούμε την δυναμοσειρά που αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx \ .$$

Επειδή

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \ ,$$

ϑα είναι

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n}$$

και

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int x^{2n} dx$$
$$= C + \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}\, x^{2n+1} \ .$$

■

4.3.4 Απόδειξη του τύπου του Euler

(Θεωρούμε ως δεδομένο ότι το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης ισχύει και για μιγαδικούς αριθμούς.)
Θέτοντας $x = i\phi$ στο ανάπτυγμα της e^x, παίρνουμε

$$e^{i\phi} = 1 + i\phi + \frac{(i\phi)^2}{2!} + \frac{(i\phi)^3}{3!} + \frac{(i\phi)^4}{4!} + \frac{(i\phi)^5}{5!} + \ldots$$

Για τις δυνάμεις της φανταστικής μονάδας i έχουμε: $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ και από εκεί και πέρα οι ίδιες τιμές επαναλαμβάνονται περιοδικά, δηλαδή $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$ κλπ. Αυτό σημαίνει ότι οι άρτιες δυνάμεις του i (ξεκινώντας από την i^0) παίρνουν διαδοχικά τις τιμές 1 και -1 και οι περιττές δυνάμεις παίρνουν διαδοχικά τις τιμές i και $-i$. Επομένως το ανάπτυγμα γίνεται

$$e^{i\phi} = (1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \ldots) + i(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + \ldots)$$

Δηλαδή τελικά

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \ .$$

Κεφάλαιο 5

Γενικευμένα ολοκληρώματα - Ειδικές συναρτήσεις

5.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Ένα ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ λέγεται **γενικευμένο** όταν:

- $a = -\infty$ ή $b = \infty$ ή και τα δύο. Έχουμε τότε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα (Γ.Ο.) **πρώτου είδους**. Παραδείγματα:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \qquad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$$

- Η $f(x)$ απειρίζεται σε ένα ή περισσότερα σημεία του διαστήματος ολοκλήρωσης. Αυτό είναι Γ.Ο. **δεύτερου είδους**. Παραδείγματα:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} \qquad \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2}$$

- Συμβαίνουν και τα δύο προηγούμενα μαζί (Γ.Ο. **τρίτου είδους**). Παράδειγμα:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3}$$

Αφού υπάρχουν οι απειρισμοί, *ο υπολογισμός ενός γενικευμένου ολοκληρώματος ανάγεται στον υπολογισμό ενός ορίου (ή και περισσότερων)*. Συνεπώς ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα μπορεί να **συγκλίνει** (αν τα όρια υπάρχουν και είναι πεπερασμένα) ή να **αποκλίνει** (αν ένα τουλάχιστον όριο δεν υπάρχει ή είναι άπειρο).

Παράδειγμα 5-1

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{s\to\infty}\int_1^s \frac{dx}{x}\\ &= \lim_{s\to\infty}[\ln x]_1^s\\ &= \lim_{s\to\infty}\ln s\\ &= \infty\end{aligned}$$

Επομένως το ολοκλήρωμα αποκλίνει.

Ερ `int 1/x dx, x = 1..infinity`

Απ $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ `(integral does not converge)`

■

Παράδειγμα 5-2

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} &= \lim_{s\to\infty}\int_1^s \frac{dx}{x^2}\\ &= \lim_{s\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^s\\ &= \lim_{s\to\infty}\left(1-\frac{1}{s}\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

Ερ `int 1/x^2 dx, x = 1..infinity`

Απ $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$

■

Παράδειγμα 5-3

Θα δούμε στα επόμενα ότι με χρήση διπλού ολοκληρώματος αποδεικνύεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \ .$$

Ερ `int exp(−x^2) dx, x = −infinity..infinity`

Απ $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx = \sqrt{\pi} \approx 1.77245$

■

Παράδειγμα 5-4

Γενικά, όταν απειρίζονται και τα δύο όρια, χωρίζουμε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα στα δύο:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2} dx \ .$$

Θα πρέπει και τα δύο να συγκλίνουν. Για το πρώτο έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx &= \lim_{s\to-\infty} \int_{s}^{0} xe^{-x^2} dx \\ &= \lim_{s\to-\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{s}^{0} e^{-x^2} d\left(x^2\right) \right) \\ &= \lim_{s\to-\infty} \left(\frac{1}{2} \left[-e^{-x^2} \right]_{s}^{0} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{s\to-\infty} \left(-e^{0} + e^{-s^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

Για το δεύτερο, με τον ίδιο τρόπο, προκύπτει

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$$

και επομένως για το αρχικό ολοκλήρωμα θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \ .$$

Ερ `int x * exp(−x^2) dx, x = −infinity..infinity`

Απ $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x} \exp\left(-\mathrm{x}^2\right) \mathrm{dx} = 0$

■

Παράδειγμα 5-5

Το ολοκλήρωμα εδώ είναι δεύτερου είδους επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση απειρίζεται στο δεξί άκρο, $x = 2$, του διαστήματος ολοκλήρωσης:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} &= \lim_{s\to 2^-} \int_0^s \frac{dx}{\sqrt{2-x}} \\ &= \lim_{s\to 2^-} \left[-2\sqrt{2-x}\,\right]_0^s \\ &= \lim_{s\to 2^-} \left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2-s}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Ερ `int 1/sqrt(2 − x) dx, x = 0..2`

Απ $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-\mathrm{x}}} \mathrm{dx} = 2\sqrt{2} \approx 2.8284$

■

Παράδειγμα 5-6

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2}$$

είναι δεύτερου είδους επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση απειρίζεται στο σημείο $x = 0$, που είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος ολοκλήρωσης. Χωρίζουμε το τελευταίο σε δύο διαστήματα πριν και μετά το $x = 0$:

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2} \ .$$

Εξετάζουμε το πρώτο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} &= \lim_{s\to 0^-} \int_{-1}^{s} \frac{dx}{x^2} \\ &= \lim_{s\to 0^-} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{s} \\ &= \lim_{s\to 0^-} \left(-\frac{1}{s} - 1\right) \\ &= \infty \ .\end{aligned}$$

Χωρίς να χρειάζεται να υπολογίσουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα, συμπεραίνουμε ότι το αρχικό αποκλίνει.

Ερ `int 1/x^2 dx, x = -1..2`

Απ $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$ (integral does not converge)

■

Παράδειγμα 5-7

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$$

είναι τρίτου είδους επειδή και έχει άνω όριο το ∞ και η ολοκληρωτέα συνάρτηση απειρίζεται στο σημείο $x = 0$. Το αναλύουμε σε δύο ολοκληρώματα για να μπορέσουμε να κάνουμε τους υπολογισμούς:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3} + \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3} \ .$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^3} &= \lim_{s\to 0^+} \int_s^1 \frac{dx}{x^3} \\ &= \lim_{s\to 0^+} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_s^1 \\ &= \lim_{s\to 0^+} \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2s^2}\right) \\ &= \infty\ .\end{aligned}$$

Επομένως και το αρχικό ολοκλήρωμα αποκλίνει.

Ερ `int 1/x^3 dx, x = 0..infinity`

Απ $\int_0^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ `(integral does not converge)`

■

5.2 Σύγκλιση Γ.Ο.

5.2.1 Ολοκληρώματα της μορφής $\int_a^\infty (dx/x^p)$

Στα παραδείγματα 5-1 και 5-2 έχουμε ειδικές περιπτώσεις από ένα *αποτέλεσμα αντίστοιχο με αυτό για τις αρμονικές σειρές*: Ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} \qquad (a>0)$$

- αποκλίνει για $p \le 1$,
- συγκλίνει για $p > 1$.

5.2.2 Κριτήριο σύγκρισης

Έστω ότι έχουμε δύο συναρτήσεις f και g με

$$0 \le f(x) \le g(x)$$

για κάθε x στο διάστημα $[a,\infty)$. Τότε

- αν το $\int_a^\infty g(x)dx$ συγκλίνει, το ίδιο κάνει και το $\int_a^\infty f(x)dx$,

- αν το $\int_a^\infty f(x)dx$ αποκλίνει, το ίδιο κάνει και το $\int_a^\infty g(x)dx$.

Το κριτήριο αυτό είναι εντελώς ανάλογο με το ομώνυμο κριτήριο για την σύγκλιση των σειρών.

Παράδειγμα 5-8

Για το ολοκλήρωμα
$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$
βρίσκουμε ότι συγκλίνει, επειδή
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$
και το
$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$$
συγκλίνει, αφού $(3/2) > 1$.

Ερ `int 1/sqrt(1 + x^3) dx, x = 1..infinity`

Απ $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{dx} \approx 1.89476$

■

Παράδειγμα 5-9

Έστω το ολοκλήρωμα
$$\int_1^\infty e^{-x^2} dx \ .$$
Για $x > 1$ (στο διάστημα ολοκλήρωσης) θα είναι $x^2 > x$ και επομένως
$$e^{-x^2} < e^{-x} \ .$$

Έχουμε όμως

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} e^{-x}dx &= \lim_{s\to\infty}\int_1^s e^{-x}dx \\ &= \lim_{s\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^s \\ &= \lim_{s\to\infty}\left(-\frac{1}{e^s}+\frac{1}{e}\right) \\ &= \frac{1}{e}\ .\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το αρχικό ολοκλήρωμα επίσης συγκλίνει. ■

Παράδειγμα 5-10

Έστω το ολοκλήρωμα

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x-e^{-x}}\ .$$

Για το διάστημα $[2,\infty)$ ισχύει

$$0 < x - e^{-x} < x\ ,$$

οπότε

$$\frac{1}{x-e^{-x}} > \frac{1}{x}$$

και συγκρίνοντας με το $\int_2^{\infty}(dx/x)$ καταλήγουμε ότι το ολοκλήρωμα αποκλίνει. ■

5.2.3 Οριακό κριτήριο σύγκρισης

Σε αντιστοιχία πάλι με τις σειρές ισχύει το εξής:

- Έστω ότι $f(x)\geq 0$ και $g(x)>0$. Τότε αν το όριο

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

  είναι θετικό και πεπερασμένο, τα ολοκληρώματα $\int_a^{\infty} f(x)dx$ και $\int_a^{\infty} g(x)dx$ είτε και τα δύο συγκλίνουν είτε και τα δύο αποκλίνουν.

Παράδειγμα 5-11

Έστω το ολοκλήρωμα
$$\int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^4 - x + 1}\, dx \ .$$
Θεωρούμε τις συναρτήσεις
$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 - x + 1} \ , \qquad g(x) = \frac{1}{x^2} \ .$$
Έχουμε
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^4-x+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^4 - x + 1} = 1 \ .$$
Επομένως, επειδή το $\int_1^{\infty} g(x)dx$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και το αρχικό μας ολοκλήρωμα.

Ερ `int x^2/(x^4 - x + 1) dx, x = 1..infinity`

Απ $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{1-x+x^4}\, dx \approx 1.05435$

■

5.2.4 Μετατροπή Γ.Ο. δεύτερου είδους σε πρώτου

Ισχύει ότι:

- Ένα Γ.Ο. δεύτερου είδους $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ μετατρέπεται στο πρώτου είδους $\int_c^{\infty} f(t)dt$ χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x = a + (1/t)$.
- Ένα Γ.Ο. δεύτερου είδους $\int_a^{b^-} f(x)dx$ μετατρέπεται στο πρώτου είδους $\int_c^{\infty} f(t)dt$ χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x = b - (1/t)$.

Παράδειγμα 5-12

Το ολοκλήρωμα δεύτερου είδους
$$\int_0^{2^-} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$$

είδαμε ότι συγκλίνει στην τιμή $2\sqrt{2}$. Θέτοντας

$$x = 2 - \frac{1}{t} \qquad (\text{οπότε} \quad t = \frac{1}{2-x})$$

θα έχουμε

$$dx = \frac{dt}{t^2}\ , \quad \frac{1}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{t}\ ,$$

ενώ για $x \to 0$, $t \to (1/2)$ και για $x \to 2^-$, $t \to \infty$. Έτσι το ολοκλήρωμα αυτό μετατρέπεται στο πρώτου είδους

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} t^{-\frac{3}{2}} dt &= \lim_{s\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{s} t^{-\frac{3}{2}} dt \\ &= \lim_{s\to\infty} \left[-2t^{-\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{s} \\ &= \lim_{s\to\infty} \left(-2s^{-\frac{1}{2}} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\ .\end{aligned}$$

■

5.2.5 Απόλυτη και υπό συνθήκη σύγκλιση

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f λέμε ότι **συγκλίνει απολύτως**, αν συγκλίνει το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $|f|$. Ισχύει ότι:

- Αν ένα Γ.Ο. συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και απλά.
- Ένα Γ.Ο. μπορεί να συγκλίνει χωρίς να συγκλίνει απολύτως. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το Γ.Ο. **συγκλίνει υπό συνθήκη**.

5.3 Κριτήριο ολοκληρώματος για σειρές

Έστω ότι η $f(x)$ είναι μια συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση στο $[1,\infty)$, όπου παίρνει θετικές τιμές. Επίσης έστω $a_n = f(n)$ (για n θετικό ακέραιο μεγαλύτερο ή ίσο του 1). Τότε

- η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και
- το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} f(x)dx$

είτε συγκλίνουν και τα δύο είτε αποκλίνουν και τα δύο.

(Δεν είναι απαραίτητο το κάτω όριο στη σειρά και το ολοκλήρωμα να είναι 1. Επίσης, δεν απαιτείται να είναι φθίνουσα σε όλο το διάστημα η f αλλά για κάθε x από μια τιμή και πάνω.)

Παράδειγμα 5-13

Οι σειρές p και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα που είδαμε ήδη. ■

5.4 Η συνάρτηση γάμμα

Η **συνάρτηση γάμμα** ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \ , \qquad \text{για } x > 0 \ .$$

Ιδιότητες της συνάρτησης γάμμα:

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
2. $\Gamma(n+1) = n!$ (n φυσικός αριθμός)
3. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$ (n φυσικός αριθμός)
4. $\Gamma(x) = 2\int_0^\infty u^{2x-1} e^{-u^2} du$

Όπως βλέπουμε από τις δύο πρώτες ιδιότητες, η συνάρτηση γάμμα μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση του παραγοντικού ($n!$) για μη ακέραιους αριθμούς.

Παράδειγμα 5-14

$$\begin{aligned} \Gamma(4) &= \int_0^\infty t^3 e^{-t} dt = -\int_0^\infty t^3 d(e^{-t}) \\ &= -\left[t^3 e^{-t}\right]_0^\infty + 3\int_0^\infty t^2 e^{-t} dt \end{aligned}$$

0 πρώτος όρος μηδενίζεται επειδή το αρνητικό εκθετικό μεγαλώνει πολύ πιο γρήγορα από το t^3 (και όπως μπορεί να προκύψει και από τον κανόνα του L' Hospital), οπότε

$$\Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) \ .$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε $\Gamma(3) = 2\,\Gamma(2)$ και $\Gamma(2) = \Gamma(1)$, ενώ εύκολα υπολογίζουμε

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \ .$$

Επομένως

$$\Gamma(4) = 3 \cdot 2 \cdot \Gamma(1) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \ .$$

■

5.5 Η συνάρτηση βήτα

Η **συνάρτηση βήτα**, που είναι δύο μεταβλητών, ορίζεται ως εξής:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \ , \qquad \text{για } x,y > 0 \ .$$

Ιδιότητες της συνάρτησης βήτα:

1. $B(x,y) = B(y,x)$
2. $B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \, \cos^{2y-1}\theta \, d\theta$
3. $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Κεφάλαιο 6

Εφαρμογές ολοκληρωμάτων

6.1 Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

Το εμβαδόν επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τα γραφήματα δύο ολοκληρώσιμων συναρτήσεων f και g και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$ δίνεται, κατά τα γνωστά, από τον τύπο

$$E = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \ .$$

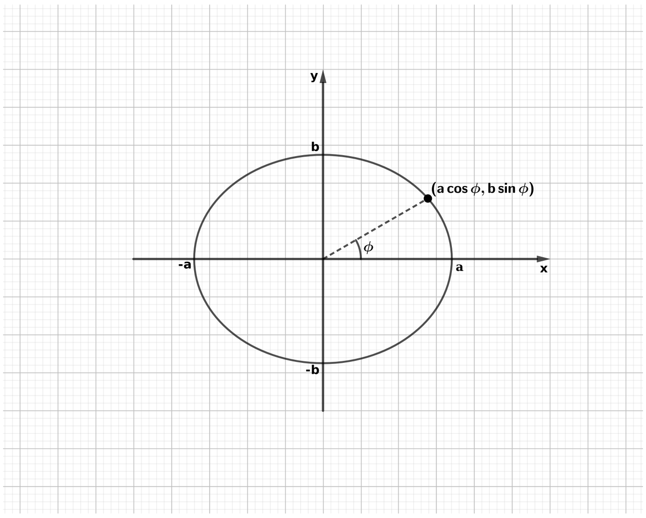
Παράδειγμα 6-1

Εμβαδόν ελλειπτικού χωρίου:
Το πάνω από τον άξονα των x τμήμα της έλλειψης $(x^2/a^2)+(y^2/b^2) = 1$ (σχήμα 6.1) είναι η γραφική πράσταση της

$$f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \ .$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\begin{aligned} E &= 2b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx \\ &= 2\frac{b}{a} \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \\ &= 2\frac{b}{a} \left(\frac{1}{2}\pi a^2 \right) \\ &= \pi ab \ . \end{aligned}$$



Σχήμα 6.1: Μία έλλειψη και οι συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου της συναρτήσει της παραμέτρου ϕ

(Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

μας έδωσε το μισό του εμβαδού του κυκλικού δίσκου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα a.) ■

Μία καμπύλη στο επίπεδο μπορεί επίσης να περιγραφεί από τις **παραμετρικές εξισώσεις** της. Αυτές δίνουν τις συντεταγμένες κάθε σημείου (x, y) της καμπύλης ως συναρτήσεις μιας παραμέτρου:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t)\ . \end{aligned}$$

Το εμβαδόν που αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\, dx$ γίνεται τότε

$$E = \int_a^b y\, dx = \int_{t_a}^{t_b} y(t) x'(t)\, dt\ ,$$

όπου ο τόνος δηλώνει παραγώγιση ως προς t.

Παράδειγμα 6-2

Οι παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ στο σχήμα 6.1

είναι

$$x = a\cos\phi$$
$$y = b\sin\phi \ .$$

(Με αντικατάσταση των x και y στην εξίσωση της έλλειψης βλέπουμε ότι αυτή ικανοποιείται.) Το περικλειόμενο εμβαδόν ξαναβρίσκουμε ότι είναι (επειδή για $x = -a$ θα είναι $\phi = \pi$ και για $x = a$ $\phi = 0$)

$$\begin{aligned}
E &= 2\int_{\pi}^{0} b\sin\phi\,(-a\sin\phi)\,d\phi \\
&= 2ab\int_{0}^{\pi} \sin^2\phi\,d\phi \\
&= 2ab\int_{0}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\phi\right) d\phi \\
&= 2ab\left[\frac{1}{2}\phi - \frac{1}{4}\sin 2\phi\right]_0^{\pi} \\
&= 2ab\,\frac{\pi}{2} \\
&= \pi ab \ .
\end{aligned}$$

■

6.2 Μήκος επίπεδης καμπύλης

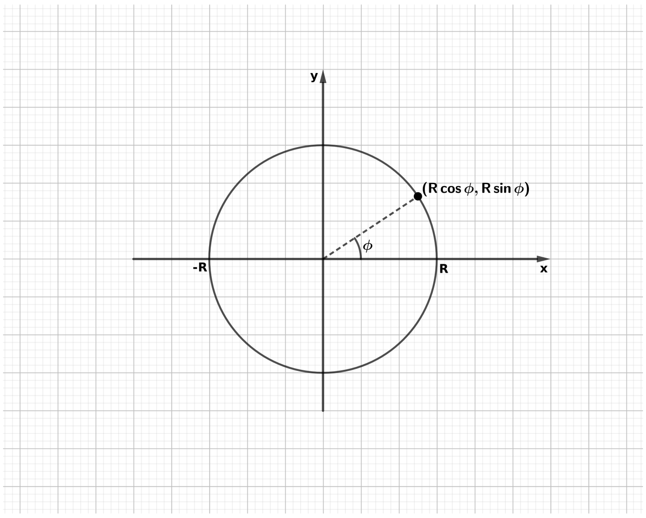
Αν έχουμε μία επίπεδη καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$, το μήκος ενός τμήματός της θα δίνεται από τη σχέση

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt \ .$$

(Μπορούμε να το καταλάβουμε αυτό αν θεωρήσουμε ότι η καμπύλη είναι η τροχιά ενός κινητού και η παράμετρος t είναι ο χρόνος. Μέσα στη ρίζα έχουμε τότε το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας, που η ολοκλήρωσή της μας δίνει την διανυόμενη απόσταση.)

Αν επιλέξουμε ως παράμετρο την συντεταγμένη x, ο τύπος γίνεται

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \ .$$



Σχήμα 6.2: Ένας κύκλος και οι συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου του συναρτήσει της παραμέτρου ϕ

Παράδειγμα 6-3

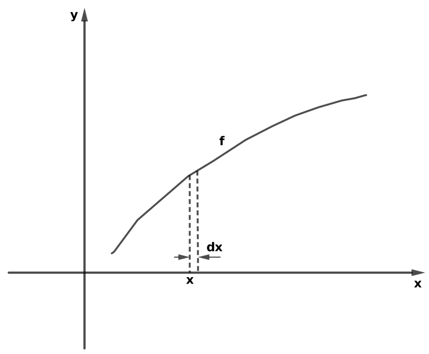
Μήκος κύκλου:
Οι παραμετρικές εξισώσεις ενός κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$ είναι

$$x = R\cos\phi$$
$$y = R\sin\phi$$

(σχήμα 6.2) κι επομένως το μήκος του θα είναι

$$\begin{aligned} L &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2\sin^2\phi + R^2\cos^2\phi}\, d\phi \\ &= 4R\,\frac{\pi}{2} \\ &= 2\pi R\ . \end{aligned}$$

■



Σχήμα 6.3: Η περιστροφή γύρω από τον οριζόντιο άξονα του στοιχειώδους ορθογωνίου πλάτους dx και ύψους $f(x)$ παράγει έναν στοιχειώδη κύλινδρο

6.3 Όγκος στερεού

6.3.1 Όγκος στερεού εκ περιστροφής

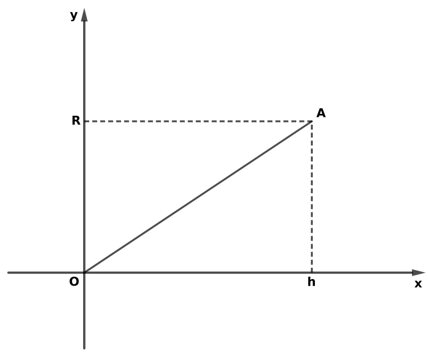
Όταν το γράφημα μιας συνάρτησης f (σχήμα 6.3) περιστρέφεται γύρω από τον άξονα των x, ο όγκος του στοιχειώδους κυλίνδρου ακτίνας $f(x)$ και ύψους dx, που σχηματίζεται από ένα τμήμα της καμπύλης αντίστοιχο σε ένα στοιχειώδες διάστημα dx γύρω από το x, θα είναι ίσος με $\pi[f(x)]^2dx$. Επομένως, αν η αρχή της καμπύλης είναι το σημείο $(x_1, f(x_1))$ και το τέλος της το $(x_2, f(x_2))$, ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται με την περιστροφή της θα είναι

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \pi[f(x)]^2dx \ .$$

Παράδειγμα 6-4

Όγκος σφαίρας:
Η περιστροφή του ημικυκλίου που είναι γραφική παράσταση της

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$



Σχήμα 6.4: Από την περιστροφή του ευθύγραμμου τμήματος OA γύρω από τον οριζόντιο άξονα παράγεται ένας κώνος

στο σχήμα 6.2 δημιουργεί σφαίρα ακτίνας R και όγκου

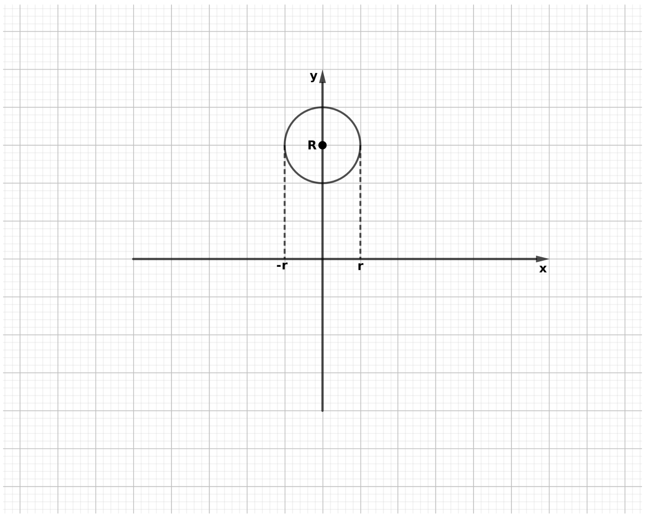
$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\, dx \\ &= \pi R^2 \int_{-R}^{R} dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx \\ &= 2\pi R^3 - 2\pi \frac{R^3}{3} \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 \ . \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 6-5

Όγκος κώνου:
Ένας κώνος με ακτίνα βάσης R και ύψος h παράγεται από την περιστροφή ενός τμήματος της ευθείας που είναι γραφική παράσταση της

$$f(x) = \frac{R}{h}\, x$$



Σχήμα 6.5: Η περιστροφή γύρω από τον άξονα των x του κύκλου με κέντρο το $(0, R)$ και ακτίνα r σχηματίζει τόρο με μεγάλη ακτίνα R και μικρή r

(σχήμα 6.4). Ο όγκος του είναι

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi \left(\frac{R}{h}\, x\right)^2 dx \\ &= \pi \frac{R^2}{h^2}\, \frac{h^3}{3} \\ &= \frac{1}{3}\pi R^2 h \ . \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 6-6

Όγκος τόρου:
Ο όγκος του τόρου που σχηματίζεται με την περιστροφή του κύκλου στο σχήμα 6.5 θα είναι

$$V = V_+ - V_- \ ,$$

όπου ο V_+ όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του πάνω ημικυκλίου και V_- του κάτω. Για τα δύο ημικύκλια οι αντίστοιχες συναρτήσεις είναι

$$\begin{aligned} f_+ &= R + \sqrt{r^2 - x^2} \\ f_- &= R - \sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} \pi \left(R + \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx - \int_{-r}^{r} \pi \left(R - \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx \\ &= 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \\ &= 4\pi R \left(\frac{1}{2}\, \pi r^2 \right) \\ &= 2\pi^2 R\, r^2 \ . \end{aligned}$$

■

6.3.2 Υπολογισμός όγκου στερεού από τη διατομή του

Αν υπάρχει συνάρτηση $E(z)$, η οποία προσδιορίζει το εμβαδόν μιας διατομής ενός στερεού παράλληλης με το επίπεδο $x - y$ και σε απόσταση z από αυτό, ο όγκος του στερεού θα είναι

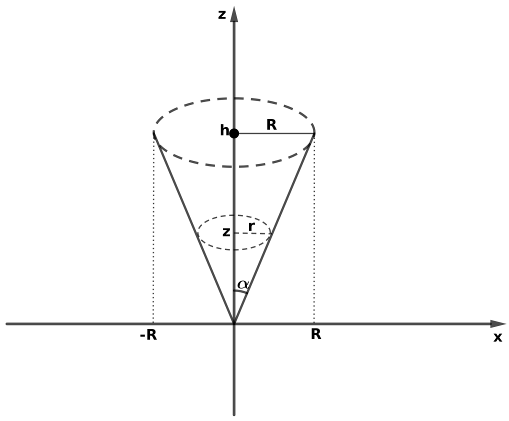
$$V = \int_{z_1}^{z_2} E(z)\, dz \ .$$

(Θεωρώντας ότι σε σχέση με τον άξονα των z το στερεό εκτείνεται από το σημείο z_1 έως το z_2.) Στο επόμενο παράδειγμα θα υπολογίσουμε και με αυτόν τον τρόπο τον όγκο ενός κώνου.

Παράδειγμα 6-7

Ο κώνος στο σχήμα 6.6 έχει γωνία α με $\tan\alpha = R/h$. Σε ύψος z μια διατομή παράλληλη με τη βάση του κώνου έχει ακτίνα $r = z\tan\alpha = z\,R/h$ και εμβαδόν

$$E(z) = \pi z^2 \frac{R^2}{h^2} \ .$$



Σχήμα 6.6: Το εμβαδόν μιας διατομής του κώνου σε ύψος z είναι $E(z) = \pi z^2 \left(R^2/h^2\right)$

Επομένως

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi z^2 \frac{R^2}{h^2}\, dz \\ &= \pi \frac{R^2}{h^2}\, \frac{h^3}{3} \\ &= \frac{1}{3} \pi R^2 h \ . \end{aligned}$$

■

6.4 Επιφάνεια στερεού εκ περιστροφής

Ο στοιχειώδης κύλινδρος εκ περιστροφής στο σχήμα 6.3 έχει παράπλευρη επιφάνεια πλάτους $2\pi f(x)$ και μήκους $\sqrt{1+(df/dx)^2}\, dx$. Επομένως η συνολική επιφάνεια του στερεού εκ περιστροφής θα είναι ίση με

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}\, dx \ ,$$

όπου x_1, x_2 τα όρια του γραφήματος που μας ενδιαφέρουν.

Παράδειγμα 6-8

Επιφάνεια σφαίρας:
Η περιστροφή του πάνω ημικυκλίου στο σχήμα 6.2 με

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

δημιουργεί σφαίρα ακτίνας R και επιφάνειας

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2 + x^2}\, dx \\ &= 2\pi R\,(2R) \\ &= 4\pi R^2 \ . \end{aligned}$$

■

6.5 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Όταν έχουμε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα που συγκλίνει μπορούμε πάλι να υπολογίσουμε επιφάνειες και όγκο, όπως στα προηγούμενα.

Παράδειγμα 6-9

Στο παράδειγμα 5-2 είχαμε

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 \ .$$

Επομένως το εμβαδόν της επιφάνειας ανάμεσα στο γράφημα της $f(x) = 1/x^2$ και τον οριζόντιο άξονα, από το σημείο με $x = 1$ ως το άπειρο, είναι ίσο με 1. Ο όγκος του αντίστοιχου στερεού εκ περιστροφής είναι

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\infty} [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4} \\ &= \pi \lim_{s \to \infty} \left[-\frac{1}{3x^3} \right]_1^s \\ &= \frac{\pi}{3} \ . \end{aligned}$$

Ερ `rotate the region between 0 and 1/x^2 with 1<x<infinity around the x-axis`

Απ $\int_1^\infty \frac{\pi}{x^4}\,dx = \frac{\pi}{3} \approx 1.0472$

Η επιφάνεια αυτού του στερεού είναι [α΄]

$$S = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-2}{x^3}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x^6}}\,dx$$
$$\approx 2{,}42\,\pi\ .$$

Ερ `revolve f(x)=1/x^2, x = 1 to infinity, around the x-axis`

Απ $\int_1^\infty \frac{2\pi\sqrt{1+\frac{4}{x^6}}}{x^2}\,dx \approx 7.61215$

■

[α΄] Το ολοκλήρωμα υπολογίστηκε στην WolframAlpha.

Κεφάλαιο 7

Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

7.1 Γενικά

Διαφορική εξίσωση (Δ.Ε.) είναι μία εξίσωση που περιλαμβάνει παραγώγους μιας συνάρτησης. Για παράδειγμα η εξίσωση

$$y'' + 5xy' - 10 = 0 \ ,$$

όπου $y = y(x)$. **Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις** (Σ.Δ.Ε.) είναι οι Δ.Ε. στις οποίες έχουμε απλές παραγώγους, ενώ **μερικές διαφορικές εξισώσεις** αυτές στις οποίες έχουμε μερικές παραγώγους (κεφάλαιο 8).

Τάξη μιας Δ.Ε. είναι η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου που εμφανίζεται σε αυτήν. Στο προηγούμενο παράδειγμα είχαμε μία Δ.Ε. 2ης τάξης ενώ οι

$$\frac{df}{dx} = f(x) \quad \text{και} \quad [g(x)+5]\,\frac{d^4g}{dx^4} = [g(x)]^2 + (2x+8)\,\frac{d^3g}{dx^3} + x^6\,\frac{d^2g}{dx^2}$$

είναι 1ης και 4ης τάξης αντίστοιχα.

Λύση μίας διαφορικής εξίσωσης σε ένα διάστημα $a < x < b$ είναι κάθε συνάρτηση $y(x)$ που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση στο διάστημα αυτό. Κατά την επίλυση μιας Δ.Ε. προκύπτουν μία ή περισσότερες (ανάλογα με την τάξη της) σταθερές ολοκλήρωσης. Η **γενική λύση** της είναι μία έκφραση που εξαρτάται από αυτές τις σταθερές (οι οποίες παίρνουν οποιεσδήποτε τιμές) και αντιστοιχεί επομένως σε άπειρες λύσεις.

Μία συγκεκριμένη **μερική λύση** παίρνουμε όταν μας δίνεται ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών**, δηλαδή μία Δ.Ε. μαζί με τον απαιτούμενο αριθμό **αρχικών συνθηκών**, οι οποίες δίνουν την τιμή της y και ενός αριθμού παραγώγων της σε ένα σημείο $x = x_0$.

Παράδειγμα 7-1

Η Δ.Ε.

$$y''(x) = -k^2 y(x)$$

έχει γενική λύση την

$$y(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx,$$

δηλαδή άπειρες συναρτήσεις αυτής της μορφής ικανοποιούν την εξίσωση. (Μπορεί κανείς να το επαληθεύσει με αντικατάσταση.) Αν μας δοθούν και οι αρχικές συνθήκες, για παράδειγμα οι

$$y(0) = 1 \quad \text{και} \quad y'(0) = 0 \ ,$$

έχουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών και μπορούμε να βρούμε την μερική λύση του. Θα έχουμε

$$y(0) = C_2 = 1$$

και

$$y'(0) = kC_1 = 0 \ , \quad \text{δηλαδή } C_1 = 0 \ .$$

Επομένως η μερική λύση θα είναι η

$$y(x) = \cos kx \ .$$

Ερ $\mathrm{y''} + \mathrm{k\hat{}2\ y} = 0$

Απ $\mathrm{y(x)} = \mathrm{c_2} \sin(\mathrm{kx}) + \mathrm{c_1} \cos(\mathrm{kx})$

■

7.2 Σ.Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών

Μία Σ.Δ.Ε. είναι **χωριζομένων μεταβλητών** αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x)}{N(y)} \ ,$$

όπου M και N πραγματικές συναρτήσεις. Θα είναι τότε

$$N(y)\, dy = M(x)\, dx$$

και η εξίσωση μπορεί να επιλυθεί με ολοκλήρωση και στα δύο μέλη.

Παράδειγμα 7-2

Για τη Δ.Ε.

$$2\sqrt{xy}\,\frac{dy}{dx} = 1 \quad (x, y > 0)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \sqrt{y}\,dy &= \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ \Rightarrow \int y^{\frac{1}{2}} dy &= \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ \Rightarrow \frac{2}{3}\,y^{\frac{3}{2}} &= c + \sqrt{x} \\ \Rightarrow y(x) &= \left(C + \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{3}} \ . \end{aligned}$$

Αυτή είναι η γενική λύση, που εξαρτάται από τη σταθερά C. (Έχουμε πάρει $C = \frac{3}{2}c$.) Το διάστημα για το x είναι το $(0, \infty)$.

Ερ `2 sqrt(x*y) y' = 1`

Απ $\mathtt{y(x)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (\mathtt{c}_1 + \sqrt{\mathtt{x}})^{2/3}$

■

Παράδειγμα 7-3

Για το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 e^{-y} \qquad \text{με } \ y(0) = 0$$

έχουμε

$$\begin{aligned} e^y dy &= 3x^2 dx \\ \Rightarrow \int e^y dy &= \int 3x^2 dx \\ \Rightarrow e^y &= x^3 + C \\ \Rightarrow y(x) &= \ln\left(x^3 + C\right) \ , \end{aligned}$$

για τη γενική λύση. Και επειδή πρέπει να είναι $y(0) = 0$ θα έχουμε

$$\ln C = 0 \;\Rightarrow\; C = 1$$

και η μερική μας λύση είναι η

$$y(x) = \ln\left(x^3 + 1\right)$$

με $-1 < x < \infty$.

Ερ `y' = 3 x^2 exp(-y), y(0) = 0`

Απ $\mathrm{y(x)} = \log\left(\mathrm{x}^3 + 1\right)$

■

Για να έρθει μια Σ.Δ.Ε. σε μορφή χωριζομένων μεταβλητών ενδέχεται να απαιτείται κάποια *αλλαγή μεταβλητής*.

Παράδειγμα 7-4

Για τη Δ.Ε.

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

θα θέσουμε $z = x + y$ κι επομένως

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= 1 + \frac{dy}{dx} = 1 + x + y = z + 1 \\
\Rightarrow\; \frac{dz}{z+1} &= dx \\
\Rightarrow\; \int \frac{dz}{z+1} &= \int dx \\
\Rightarrow\; \ln(z+1) &= c + x \\
\Rightarrow\; z + 1 &= C\,e^x \\
\Rightarrow\; z &= C\,e^x - 1 \\
\Rightarrow\; x + y &= C\,e^x - 1 \\
\Rightarrow\; y(x) &= C\,e^x - x - 1\;.
\end{aligned}$$

Ερ $\mathrm{y}' = \mathrm{x} + \mathrm{y}$

Απ $\mathrm{y}(\mathrm{x}) = \mathrm{c}_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - \mathrm{x} - 1$

7.3 Γραμμικές Σ.Δ.Ε. 1ης τάξης

Μία **γραμμική διαφορική εξίσωση** (συνήθης) έχει τη μορφή

$$a_n(x)\,y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\,y'(x) + a_0(x)\,y(x) = b(x)\ .$$

(Πρέπει η $y(x)$ και κάθε παράγωγός της να εμφανίζονται μόνο στην πρώτη δύναμη και να μην πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους πουθενά. Επίσης δεν πρέπει να είναι ορίσματα άλλων συναρτήσεων, δηλαδή δεν επιτρέπονται εκφράσεις όπως $\sin y'$ ή e^y για παράδειγμα.)

Αν έχουμε μία **γραμμική Σ.Δ.Ε. 1ης τάξης**, μπορούμε να τη φέρουμε στην αρχική μορφή

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y(x) = q(x)$$

(όπου $p(x)$ και $q(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις) και να την πολλαπλασιάσουμε με τον λεγόμενο **ολοκληρωτικό παράγοντα**

$$e^{\int p(x)\,dx}\ .$$

Θα έχουμε τότε

$$e^{\int p(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)\,dx}p(x)\,y(x) = e^{\int p(x)\,dx}q(x)$$

και επομένως

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)\,dx}y(x)\right) = e^{\int p(x)\,dx}q(x)\ ,$$

οπότε η εξίσωση μπορεί να επιλυθεί με ολοκλήρωση ως προς x και στα δύο μέλη.

Παράδειγμα 7-5

Για τη Δ.Ε.

$$x\,y' + 3y = \frac{\sin x}{x^2} \qquad (x > 0)$$

η αρχική μορφή που πρέπει να πάρουμε είναι

$$y' + \frac{3}{x}\,y = \frac{\sin x}{x^3}\ .$$

Έχουμε

$$\int p(x)\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx = 3\ln x$$

και

$$e^{3\ln x} = x^3\ .$$

Επομένως, ξεκινώντας από τον πολλαπλασιασμό της εξίσωσης επί x^3 , παίρνουμε

$$\begin{aligned} x^3y' + 3x^2y &= \sin x \\ \Rightarrow\ \frac{d}{dx}(x^3y) &= \sin x \\ \Rightarrow\ x^3y &= C - \cos x \\ \Rightarrow\ y(x) &= \frac{C}{x^3} - \frac{\cos x}{x^3} \end{aligned}$$

με $x > 0$.

Ερ $\mathtt{xy' + 3y = sin(x)/x\hat{}2}$

Απ $\mathtt{y(x)} = \frac{\mathtt{c_1}}{\mathtt{x^3}} - \frac{\cos(\mathtt{x})}{\mathtt{x^3}}$

■

Παράδειγμα 7-6

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(x+1)\,\frac{dy}{dx} - 2(x^2+x)\,y = \frac{e^{x^2}}{x+1} \qquad (x > -1) \qquad \text{με }\ y(0) = 5\ .$$

Διαιρώντας την εξίσωση με $x + 1$ παίρνουμε

$$\frac{dy}{dx} - 2x\,y = \frac{e^{x^2}}{(x+1)^2}\ .$$

Πολλαπλασιάζοντας με
$$e^{\int(-2x)\,dx} = e^{-x^2}$$
θα έχουμε

$$\begin{aligned} e^{-x^2}\frac{dy}{dx} - 2xe^{-x^2}y &= \frac{1}{(x+1)^2} \\ \Rightarrow\ \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}y\right) &= \frac{1}{(x+1)^2} \\ \Rightarrow\ e^{-x^2}y &= C - \frac{1}{x+1} \\ \Rightarrow\ y(x) &= Ce^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x+1} \end{aligned}$$

με $x > -1$. Αυτή είναι η γενική λύση της Δ.Ε. Χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $y(0) = 5$, έχουμε
$$5 = C - 1\ ,$$
δηλαδή $C = 6$ και η λύση του προβλήματός μας είναι η

$$y(x) = 6e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x+1}\ .$$

Ερ $\mathtt{(x+1)y' - 2(x\hat{}2+x)y = exp(x\hat{}2)/(x+1),\ y(0) = 5}$

Απ $\mathtt{y(x)} = \frac{\mathtt{e^{x^2}(6x+5)}}{\mathtt{x+1}}$

■

7.4 Εξισώσεις Bernoulli

Οι **εξισώσεις Bernoulli** είναι μη γραμμικές Σ.Δ.Ε. 1ης τάξης που έχουν τη μορφή
$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)\,y^n \qquad (n \neq 1)\ .$$
Μετατρέπονται σε γραμμικές με την αντικατάσταση:
$$z = \frac{1}{y^{n-1}}\ .$$
Πράγματι, επειδή
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{n-1}{y^n}\frac{dy}{dx} \ \Rightarrow\ \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{n-1}\frac{dz}{dx}$$

και μία εξίσωση Bernoulli ισοδυναμεί με την

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}+p(x)\,\frac{1}{y^{n-1}}=q(x)$$

παίρνουμε την

$$-\frac{1}{n-1}\frac{dz}{dx}+p(x)\,z(x)=q(x)\ ,$$

που είναι μια γραμμική Δ.Ε.

Παράδειγμα 7-7

Η Δ.Ε.

$$y'+\frac{2}{x}\,y=\frac{y^3}{x^2}$$

ισοδυναμεί με την

$$\frac{1}{y^3}\,y'+\frac{2}{x}\,\frac{1}{y^2}=\frac{1}{x^2}\ .$$

Θέτοντας $z=1/y^2$ θα βρούμε

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}+\frac{2}{x}\,z=\frac{1}{x^2}$$

ή

$$\frac{dz}{dx}-\frac{4}{x}\,z=-\frac{2}{x^2}\ .$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας θα είναι

$$e^{\int(-\frac{4}{x})\,dx}=e^{-4\ln x}=x^{-4}$$

και θα έχουμε

$$\begin{aligned}x^{-4}\frac{dz}{dx}-4x^{-5}\,z&=-2x^{-6}\\ \Rightarrow\ \frac{d}{dx}(x^{-4}z)&=-2x^{-6}\\ \Rightarrow\ x^{-4}z&=C+\frac{2}{5}\,x^{-5}\\ \Rightarrow\ z(x)&=Cx^4+\frac{2}{5x}\,.\end{aligned}$$

Επειδή

$$y=\pm(1/\sqrt{z})$$

θα είναι τελικά

$$y(x) = \pm \left(Cx^4 + \frac{2}{5x} \right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Ερ y′ + (2/x)y = y^3/x^2

Απ $\mathtt{y(x)} = -\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{\mathtt{x}}}{\sqrt{\mathtt{c_1\,x^5+2}}}, \quad \mathtt{y(x)} = \frac{\sqrt{5}\,\sqrt{\mathtt{x}}}{\sqrt{\mathtt{c_1\,x^5+2}}}$

■

Κεφάλαιο 8

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

8.1 Γενικά

Οι συνηθισμένες συναρτήσεις μίας μεταβλητής είναι η πιο απλή περίπτωση συναρτήσεων. Υπάρχουν επίσης

- οι **συναρτήσεις πολλών μεταβλητών**, οι οποίες σε κάθε σημείο $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ του $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ αντιστοιχίζουν μία τιμή
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ ,$$
- οι **διανυσματικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής**, οι οποίες σε κάθε $t \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζουν ένα διάνυσμα
$$\mathbf{F}(t) = (\ F_x(t), F_y(t), F_z(t)\ ) \ ,$$
- οι **διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών**, οι οποίες σε κάθε σημείο $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ του $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ αντιστοιχίζουν ένα διάνυσμα
$$\begin{aligned} &\mathbf{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ =&(\ F_x(x_1, x_2, \ldots, x_n), F_y(x_1, x_2, \ldots, x_n), F_z(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ ) \ . \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε στις απλές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών (τέτοιες είναι άλλωστε και οι συνιστώσες των διανυσματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών) και κυρίως, για λόγους απλότητας, σε συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Σε αυτές συμβολίζουμε συνήθως την εξαρτημένη μεταβλητή ως

$$z = f(x, y)$$

και οι γραφικές τους παραστάσεις είναι επιφάνειες πάνω (ή κάτω) από το επίπεδο $x-y$ σε ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων $x-y-z$.

Βολεύει συχνά να θεωρούμε τις συντεταγμένες (x, y) ενός σημείου του επιπέδου ως τις συνιστώσες του διανύσματος θέσης αυτού του σημείου (σε σχέση με την αρχή των αξόνων), $\mathbf{x} = (x, y)$, οπότε για τη συνάρτηση θα έχουμε

$$z = f(\mathbf{x}) \; .$$

(Στη γενική περίπτωση πολλών μεταβλητών θα είναι $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.) Χρήσιμες επίσης είναι και οι εναλλακτικές των καρτεσιανών **πολικές συντεταγμένες**, οι οποίες, όπως ακριβώς στο μιγαδικό επίπεδο (σχήμα 1.1), θα είναι οι

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (\,\phi \in [0, 2\pi)\,) \; . \end{aligned}$$

8.2 Όρια και συνέχεια

Αντίστοιχα με τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής, θα λέμε ότι το **όριο** μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών είναι

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = L \; ,$$

αν η τιμή της συνάρτησης μπορεί να πλησιάσει οσοδήποτε κοντά στο L ($|f(\mathbf{x})-L| < \varepsilon$ για κάθε ε), αρκεί το $\mathbf{x}$ να πλησιάσει αρκετά κοντά στο $\mathbf{x_0}$ ($|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}| < \delta$ για το κατάλληλο δ).
($|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}|$ είναι το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{x}-\mathbf{x_0}$, το οποίο στην περίπτωση δύο μεταβλητών θα είναι ίσο με $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.)

Συνεχής σε ένα σημείο $\mathbf{x_0}$ θα είναι πάλι μία συνάρτηση f αν

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0}) \; .$$

Οι ιδιότητες των ορίων των συναρτήσεων μιας μεταβλητής γενικεύονται και στην περίπτωση των πολλών μεταβλητών. Οι συνηθισμένες συναρτήσεις είναι πάλι συνεχείς στα σημεία του πεδίου ορισμού τους κατά τα γνωστά. Η απόδειξη της ύπαρξης ενός ορίου είναι πάντως πιο δύσκολη τώρα. Ο λόγος είναι ο εξής: Σε μία συνάρτηση μίας μεταβλήτής για να υπάρχει το όριο όταν $x \to x_0$ πρέπει να υπάρχουν τα όρια για $x \to x_0^-$ και $x \to x_0^+$ και να είναι ίσα. Τώρα *υπάρχει μια απειρία τρόπων να πλησιάσουμε ένα σημείο* $\mathbf{x_0}$ *και με όλους πρέπει να προκύπτει το ίδιο όριο.* Οι πολικές συντεταγμένες μπορεί να βολεύουν.

Παράδειγμα 8-1

Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(2,3)} (x^2y - x^3y^2 - x - 6y) = -80 \\
&\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{xy+1}{x^2-y^2} = 1 \\
&\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \left(x^2y - xy\cos(\pi x - \pi y)\right) = -6 \ ,
\end{aligned}$$

δηλαδή απλώς υπολογίσαμε τις τιμές των συναρτήσεων στα αντίστοιχα σημεία, επειδή οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς. ■

Παράδειγμα 8-2

Θα εξετάσουμε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \ .$$

Στο σημείο $(0,0)$ δεν ορίζεται η συνάρτηση. Πλησιάζοντας το σημείο αυτό από τον άξονα των x πρώτα ($y=0$) βρίσκουμε ότι

$$f(x,y) \to \frac{x^2}{x^2} = 1 \ ,$$

ενώ πλησιάζοντάς το από τον άξονα των y ($x=0$) βρίσκουμε

$$f(x,y) \to \frac{-y^2}{y^2} = -1 \ .$$

Αφού τα δύο αυτά αποτελέσματα είναι διαφορετικά, συμπεραίνουμε ότι το όριο δεν υπάρχει. ■

Παράδειγμα 8-3

Για το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

βρίσκουμε πλησιάζοντας το $(0,0)$ από τον άξονα των x ($y=0$) ότι

$$f(x,y) \to \frac{0}{x^2} = 0$$

και πλησιάζοντάς το από τον άξονα των y ($x = 0$) πάλι

$$f(x, y) \to \frac{0}{y^2} = 0 \ .$$

Αν όμως κινηθούμε προς το $(0, 0)$ πάνω στην ευθεία $y = x$ θα έχουμε

$$f(x, y) \to \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \ .$$

Επομένως ούτε αυτό το όριο υπάρχει.

Μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα με *χρήση πολικών συντεταγμένων*. Το $(x, y) \to (0, 0)$ σημαίνει τότε ότι $r \to 0$ για οποιοδήποτε ϕ. Έχουμε:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\phi \; r\sin\phi}{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi} = \frac{1}{2}\sin 2\phi \ .$$

Βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα εξαρτάται από το ϕ, δηλαδή δεν είναι ανεξάρτητο του δρόμου από τον οποίο πλησιάζουμε την αρχή των αξόνων $(0, 0)$.

Ερ `lim xy/(x^2 + y^2) as x->0, y->0`

Απ `(limit does not exist, is path dependent, or cannot be determined)`

■

Παράδειγμα 8-4

Για το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

θα δοκιμάσουμε να πλησιάσουμε το $(0, 0)$ κινούμενοι πάνω σε μία τυχαία ευθεία $y = \lambda x$. Καλύπτουμε έτσι κάθε δυνατή ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων εκτός από τον άξονα των y. Θα είναι

$$f(x, y) = \frac{x(\lambda x)^2}{x^2 + (\lambda x)^4} = \frac{x\lambda^2}{1 + \lambda^4 x^2} \to 0 \ , \quad \forall \ \lambda \ .$$

Κινούμενοι πάνω στον άξονα των y $(x = 0)$ προς το $(0, 0)$ βρίσκουμε ξανά ότι

$$f(x, y) \to \frac{0}{y^4} = 0 \ .$$

Πάλι όμως δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι. Αν αντί για ευθεία πάρουμε την παραβολή $x = y^2$ βρίσκουμε

$$f(x, y) \to \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2} \ .$$

Άρα το όριο δεν υπάρχει.

Ερ `lim xy^2/(x^2 + y^4) as x−>0, y−>0`

Απ `(limit does not exist)`

■

Παράδειγμα 8-5

Είναι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2} = 1 \ .$$

Πράγματι, με πολικές συντεταγμένες το όριο αυτό γίνεται

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sin r^2}{r^2} \ ,$$

το οποίο προκύπτει ίσο με 1 όπως το $\lim_{x\to 0}(\sin x/x)$ και είναι ανεξάρτητο του δρόμου από τον οποίο πλησιάζουμε το $(0, 0)$, αφού δεν έχουμε καμία εξάρτηση από τη γωνία ϕ. ■

Παράδειγμα 8-6

Έστω το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \ .$$

Με πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos^2\phi \, \sin\phi}{r^2} = \lim_{r\to 0} (r \cos^2\phi \, \sin\phi) = 0 \ .$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε επίσης επειδή

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \ ,$$

οπότε

$$\frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq |y|$$

και από το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων θα είναι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0 \ ,$$

αφού

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0 \ .$$

Ερ `lim x^2 y/(x^2+y^2) as x->0, y->0`

Απ `0`

■

8.3 Μερικές παράγωγοι

Μερική παράγωγος μίας συνάρτησης πολλών μεταβλητών f ως προς μία μεταβλητή της είναι η συνάρτηση που προκύπτει αν παραγωγίσουμε την f ως προς τη μεταβλητή αυτή, θεωρώντας τις άλλες μεταβλητές ως σταθερές. Συμβολίζουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{ή} \qquad f_x$$

την μερική παράγωγο ως προς x. Άλλες μερικές παράγωγοι, για παράδειγμα, είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} \ , \qquad g_y \ , \qquad \frac{\partial h}{\partial x_5} \ .$$

Μπορούμε να έχουμε μερικές παραγώγους μεγαλύτερης τάξης όπως

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \ \text{ή} \ f_{xx} \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \ \text{ή} \ f_{yyy}$$

ή και μικτές παραγώγους

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{ή } f_{xy} \ .$$

Παράδειγμα 8-7

1. $f(x,y) = x^3 + y^5 + x^2 y$

$$\begin{array}{ll} f_x = 3x^2 + 2xy & f_y = 5y^4 + x^2 \\ f_{xx} = 6x + 2y & f_{yy} = 20y^3 \\ f_{xy} = 2x & f_{yx} = 2x \end{array}$$

Ερ `d/dx x^3 + y^5 + x^2y, d/dy x^3 + y^5 + x^2y,`
`d/dx d/dx x^3 + y^5 + x^2y,`
`d/dy d/dy x^3 + y^5 + x^2y,`
`d/dy d/dx x^3 + y^5 + x^2y,`
`d/dx d/dy x^3 + y^5 + x^2y`

Απ $\{x(3x+2y),\ x^2+5y^4,\ 2(3x+y),\ 20y^3,\ 2x,\ 2x\}$

2. $f(x,y) = xe^{3y}$

$$\begin{array}{ll} f_x = e^{3y} & f_y = 3xe^{3y} \\ f_{xx} = 0 & f_{yy} = 9xe^{3y} \\ f_{xy} = 3e^{3y} & f_{yx} = 3e^{3y} \end{array}$$

3. $g(x,y) = (x-y)/(x+y)$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2y}{(x+y)^2} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{2x}{(x+y)^2}$$

4. $h(x,y) = \ln(x+2y)$

$$\begin{array}{ll} h_x = 1/(x+2y) & h_y = 2/(x+2y) \\ h_{xx} = -1/(x+2y)^2 & h_{yy} = -4/(x+2y)^2 \\ h_{xy} = -2/(x+2y)^2 & h_{yx} = -2/(x+2y)^2 \end{array}$$

5. $f(x,y,z) = xy^2z^3 + 5yz$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3 + 5z \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2 + 5y$$

■

Τα αποτελέσματα για τις μικτές παραγώγους που βρήκαμε στα μέρη 1, 2 και 4 του προηγούμενου παραδείγματος δεν είναι τυχαία: Ισχύει ότι, αν η f ορίζεται σε μία περιοχή που περιέχει ένα σημείο (x_0, y_0) και οι συναρτήσεις f_{xy} και f_{yx} είναι συνεχείς στην περιοχή αυτή, τότε

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) \ .$$

Ο ακριβής ορισμός της μερικής παραγώγου μίας συνάρτησης 2 μεταβλητών f σε ένα σημείο (x,y) είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Από εδώ προκύπτει και η γεωμετρική σημασία της τιμής της μερικής παραγώγου σε ένα σημείο (x_0, y_0). Η γραφική παράσταση της $z = f(x,y)$ είναι μια επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο, όπου έχουμε ένα σύστημα αξόνων $x-y-z$. Η τομή της επιφάνειας αυτής με το επίπεδο $y = y_0$, που είναι κάθετο στο επίπεδο $x-y$ και περνάει από το (x_0, y_0), είναι μία καμπύλη. Αν πάρουμε, πάνω στο επίπεδο $y = y_0$, την εφαπτομένη της καμπύλης αυτής στο σημείο (x_0, y_0, z_0) ($z_0 = f(x_0, y_0)$), η τιμή της μερικής παραγώγου θα είναι ίση με την κλίση της εφαπτομένης αυτής. (Τα αντίστοιχα ισχύουν για την μερική παράγωγο $\partial f/\partial y$).

8.4 Ο κανόνας της αλυσίδας

Όταν έχουμε μία σύνθετη συνάρτηση μίας μεταβλητής με $y = f(x)$, όπου το x είναι συνάρτηση μίας άλλης μεταβλητής t ($x = x(t)$), ο κανόνας της αλυσίδας μας λέει ότι

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} \ .$$

Για μία σύνθετη συνάρτηση 2 μεταβλητών με $z = f(x,y)$ ισχύουν τύποι όπως οι παρακάτω.

- Για $x = x(t)$ και $y = y(t)$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

- Για $x = x(s,t)$ και $y = y(s,t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Παράδειγμα 8-8

Αν

$$z = f(x,y) = \sin x \cos y$$

με $x = \pi t$, $y = \sqrt{t}$, θα είναι

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= \pi \cos x \cos y - \frac{1}{2\sqrt{t}} \sin x \sin y\ .\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 8-9

Έστω

$$z = f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

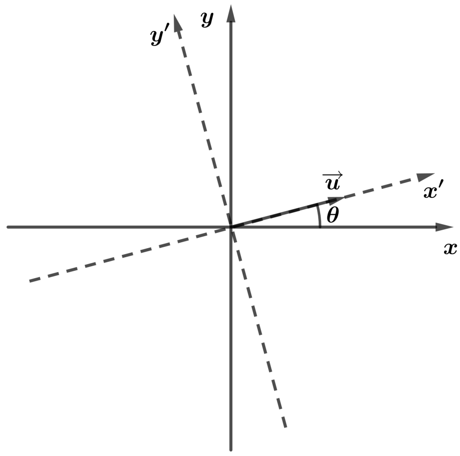
με $x = s + t$, $y = st$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= (2x+y) + (x+2y)t\\ &= (2+t)x + (1+2t)y\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ &= (2x+y) + (x+2y)s\\ &= (2+s)x + (1+2s)y\ .\end{aligned}$$

■



Σχήμα 8.1: Ο νέος άξονας x' είναι στην διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{u}$

8.5 Η παράγωγος κατά κατεύθυνση και η βαθμίδα

Είδαμε ότι για να πάρουμε την μερική παράγωγο ως προς x παίρνουμε ένα κατακόρυφο επίπεδο παράλληλο με τον άξονα των x και εξετάζουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης πάνω σε αυτό, ενώ κινούμαστε κατά την διεύθυνση του άξονα των x. Τα αντίστοιχα έχουμε για την μερική παράγωγο ως προς y. Αυτές οι δύο μερικές παράγωγοι όμως δεν είναι παρά ειδικές περιπτώσεις της **παραγώγου κατά κατεύθυνση**, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$D_{\mathbf{u}} f = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hu_x, y + hu_y) - f(x, y)}{h} \ .$$

$\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα που ορίζει μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Τώρα παίρνουμε ένα κατακόρυφο επίπεδο παράλληλο με αυτή την ευθεία και η παράγωγος κατά κατεύθυνση μας δίνει το πώς μεταβάλλεται η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης (που είναι η τομή της γραφικής παράστασης της f με το επίπεδο αυτό) καθώς κινούμαστε πάνω στην ευθεία. Βλέπουμε ότι *η μερική παράγωγος ως προς x είναι η παράγωγος κατά την κατεύθυνση του* $(1,0)$ *(του μοναδιαίου διανύσματος στον άξονα των x) και η μερική παράγωγος ως προς y είναι η παράγωγος κατά την κατεύθυνση του* $(0,1)$.

Ένα τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα, με αρχή την αρχή των αξόνων, που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των x (σχήμα 8.1) γράφεται ως

$$\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$$

και αν περιστρέψουμε τους άξονες μας έτσι ώστε ο νέος άξονας των x' να συμπέσει με τη διεύθυνση του $\mathbf{u}$, παρατηρούμε ότι η $D_{\mathbf{u}}f$ δεν θα είναι άλλη από την μερική παράγωγο της f ως προς x'. Από τη γραμμική άλγεβρα είναι γνωστό ότι οι παλιές συντεταγμένες συνδέονται με τις νέες με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta \ . \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας επομένως τον κανόνα της αλυσίδας θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x'} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(\cos\theta, \sin\theta) \ . \end{aligned}$$

Ορίζοντας την **βαθμίδα της συνάρτησης f** ως το διάνυσμα (δηλαδή τη διανυσματική συνάρτηση)

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

σε κάθε (x, y), καταλήγουμε στη σχέση

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} \ ,$$

με την οποία μπορούμε να υπολογίζουμε εύκολα κάθε παράγωγο κατά κατεύθυνση (ως συνάρτηση των x και y).

Επειδή

$$\nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f|\cos\alpha \ ,$$

όπου α η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων ∇f και $\mathbf{u}$ (σε ένα σημείο (x, y)), συμπεραίνουμε ότι *ο μεγαλύτερος ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης (στο σημείο αυτό) βρίσκεται κατά την κατεύθυνση του διανύσματος της βαθμίδας της* ($\alpha = 0$).

Ισχύει επίσης ότι:

- Το διάνυσμα της βαθμίδας $\nabla f(x_0, y_0)$ μίας συνάρτησης 2 μεταβλητών f είναι κάθετο στην ισοσταθμική καμπύλη $f(x, y) = k$ στο σημείο (x_0, y_0). (**Ισοσταθμική καμπύλη** είναι μία καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ που σχηματίζεται από τα σημεία (x, y) στα οποία η συνάρτηση έχει μία συγκεκριμένη τιμή k.)

- Αντίστοιχα, το διάνυσμα της βαθμίδας $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ μίας συνάρτησης 3 μεταβλητών f είναι κάθετο στην ισοσταθμική επιφάνεια $f(x, y, z) = k$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0).

Παράδειγμα 8-10

Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \sqrt{5x - 4y} \ .$$

Για την παράγωγό της στο σημείο $(4, 1)$, κατά την κατεύθυνση που καθορίζεται από τη γωνία $\theta = -\pi/6$, θα έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{5}{2\sqrt{5x - 4y}} = \frac{5}{8} \ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{\sqrt{5x - 4y}} = -\frac{1}{2} \ ,$$

οπότε

$$\nabla f = \left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}\right) \ ,$$

ενώ

$$\mathbf{u} = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \ .$$

Επομένως η ζητούμενη παράγωγος είναι

$$\left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{16} + \frac{1}{4} \ .$$

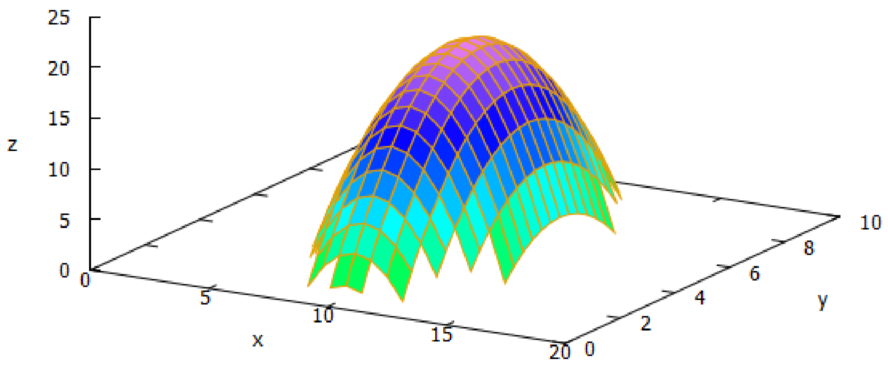
Ερ `grad sqrt(5x-4y)`

Απ $\mathtt{grad}\left(\sqrt{5x - 4y}\right) = \left(\frac{5}{2\sqrt{5x-4y}}, -\frac{2}{\sqrt{5x-4y}}\right)$

Ερ `derivative of sqrt(5x-4y) in the direction (sqrt(3)/2,-1/2)`

Απ $\frac{4+5\sqrt{3}}{4\sqrt{5x-4y}}$

(Οι δύο υπολογισμοί στην WolframAlpha μας έδωσαν τη βαθμίδα και την παράγωγο κατά τη συγκεκριμένη κατεύθυνση ως συναρτήσεις των x και y. Αντικαθιστώντας με το συγκεκριμένο σημείο $(x, y) = (4, 1)$ παίρνουμε τις τιμές που έχουμε υπολογίσει.) ■



Σχήμα 8.2: Ένα τέλεια συμμετρικό βουνό με κορυφή στο $(x, y, z) = (10, 5, 20)$

Παράδειγμα 8-11

Η επιφάνεια ενός τέλεια συμμετρικού βουνού δίνεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης (σχήμα 8.2)

$$z = f(x, y) = -(x - 10)^2 - (y - 5)^2 + 20 \ .$$

Το βουνό δηλαδή έχει σχήμα αναποδογυρισμένου κυκλικού παραβολοειδούς, το ύψος του είναι 20 (η κορυφή είναι στο $(10, 5, 20)$) και το κέντρο της βάσης του στο επίπεδο $x - y$ είναι το $(10, 5, 0)$. *Αν βρισκόμαστε σε ένα σημείο της επιφάνειας του βουνού που οι 2 πρώτες συντεταγμένες του είναι (x, y), προς ποια κατεύθυνση πρέπει να κινηθούμε για να ανεβούμε πιο γρήγορα;*

Η απάντηση είναι ότι πρέπει να κινηθούμε προς την κατεύθυνση της βαθμίδας της f στο σημείο αυτό. Αυτή είναι

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (\,-2(x - 10), -2(y - 5)\,) \ .$$

Ας πάρουμε μερικά παραδείγματα σημείων.

- $(12, 5)$
$$\nabla f = (-4, 0)$$

Το σημείο μας είναι δεξιότερα από την κορυφή του βουνού και πρέπει να κινηθούμε παράλληλα με τον άξονα των x και αριστερά.

- $(10, 7)$
$$\nabla f = (0, -4)$$
Το σημείο μας είναι πιο πέρα (προς τον άξονα των y) από την κορυφή του βουνού και πρέπει να κινηθούμε παράλληλα με τον άξονα των y και προς τα πίσω.

- $(12, 7)$
$$\nabla f = (-4, -4)$$
Το σημείο μας είναι και στις δύο κατευθύνσεις x και y πιο πέρα από την κορυφή του βουνού και πρέπει να κινηθούμε διαδοχικά, παράλληλα πρώτα με τον ένα άξονα προς τα πίσω και μετά με τον άλλο πάλι προς τα πίσω.

Ερ `grad (-(x - 10)^2 - (y - 5)^2 + 20)`

Απ $\mathtt{grad}(-(\mathtt{x}-10)^2-(\mathtt{y}-5)^2+20)=(20-2\mathtt{x},-2(\mathtt{y}-5))$

■

8.6 Ακρότατα και σαγματικά σημεία

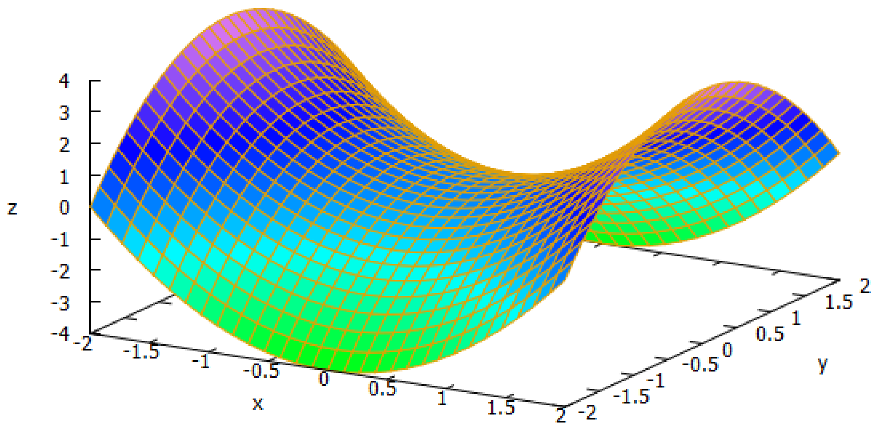
Στα **τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα** (σχήματα 8.4, 8.5) μίας συνάρτησης πολλών μεταβλητών οι μερικές της παράγωγοι, αν υπάρχουν, μηδενίζονται. (Μπορεί να μην υπάρχουν όπως, για παράδειγμα, στην κορυφή ενός κώνου.) **Κρίσιμο σημείο** ονομάζεται ένα σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης όπου *οι μερικές παράγωγοι είτε μηδενίζονται*,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(για 2 μεταβλητές), *είτε δεν υπάρχουν όλες*. Ένα κρίσιμο σημείο ενδέχεται πάντως να μην αντιστοιχεί σε ακρότατο αλλά να είναι **σαγματικό σημείο** (σχήμα 8.3), που είναι το ανάλογο του σημείου καμπής που έχουμε σε συναρτήσεις μίας μεταβλητής. Για να χαρακτηρίσουμε ένα κρίσιμο σημείο (x_0, y_0) μίας συνάρτησης f 2 μεταβλητών χρησιμοποιούμε το ακόλουθο κριτήριο:

Έστω ότι σε έναν δίσκο με κέντρο το (x_0, y_0) οι δεύτερες παράγωγοι της f είναι συνεχείς. Ορίζουμε την **διακρίνουσα**

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$



Σχήμα 8.3: Σαγματικό σημείο στο $(0,0)$ της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 - y^2$

και ισχύει ότι:

- Αν $D(x_0, y_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, το $f(x_0, y_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.
- Αν $D(x_0, y_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, το $f(x_0, y_0)$ είναι τοπικό μέγιστο.
- Αν $D(x_0, y_0) < 0$, το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο.

Στην περίπτωση όπου $D(x_0, y_0) = 0$ το κριτήριο δεν δίνει απάντηση και πρέπει το ζήτημα να εξεταστεί με άλλον τρόπο.

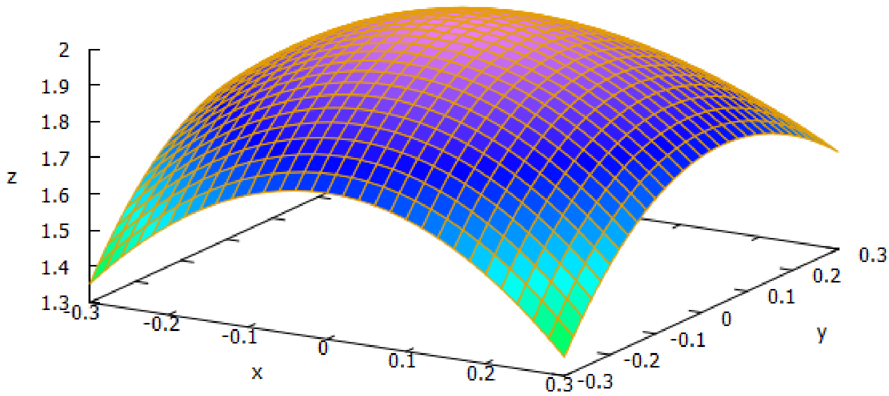
Παράδειγμα 8-12

Έστω η $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$. Έχουμε:

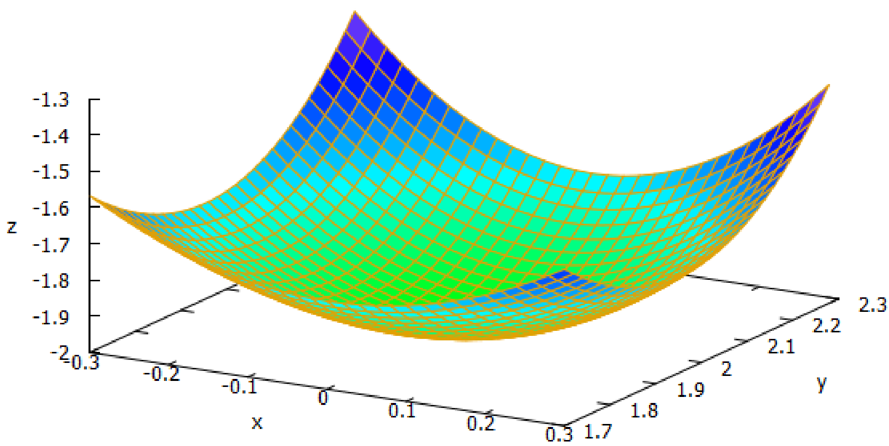
$$\begin{array}{ll} f_x = 6xy - 6x & f_y = 3x^2 + 3y^2 - 6y \\ f_{xx} = 6y - 6 & f_{yy} = 6y - 6 \\ f_{xy} = 6x & \end{array}$$

Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία πρέπει να πάρουμε το σύστημα $f_x = 0$ και $f_y = 0$, δηλαδή

$$\begin{aligned} x(y-1) &= 0 \\ y(y-2) &= -x^2 \end{aligned}$$



Σχήμα 8.4: Τοπικό μέγιστο στο $(0, 0)$



Σχήμα 8.5: Τοπικό ελάχιστο στο $(0, 2)$

ή

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\text{ή} \quad y = 1 \\ y(y-2) \;&=\; -x^2 \end{aligned}$$

- Για $x = 0$ η δεύτερη εξίσωση γίνεται $y(y-2) = 0$ και μας δίνει $y = 0$ ή $y = 2$ και επομένως παίρνουμε τα κρίσιμα σημεία $(0, 0)$ και $(0, 2)$.
- Για $y = 1$ η δεύτερη εξίσωση γίνεται $1 = x^2$ και μας δίνει $x = -1$ ή $x = 1$ και επομένως παίρνουμε τα κρίσιμα σημεία $(-1, 1)$ και $(1, 1)$.

Η διακρίνουσα θα είναι

$$\begin{aligned} D(x,y) &= f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 \\ &= (6y-6)(6y-6) - (6x)^2 \\ &= (6y-6)^2 - 6^2x^2 \end{aligned}$$

και για τα κρίσιμα σημεία έχουμε:

- $(0, 0)$
  $$D(0,0) = 36 > 0 \ , \ f_{xx}(0,0) = -6 < 0$$
  $f(0, 0)$: τοπικό μέγιστο (σχήμα 8.4),
- $(0, 2)$
  $$D(0,2) = 36 > 0 \ , \ f_{xx}(0,2) = 6 > 0$$
  $f(0, 2)$: τοπικό ελάχιστο (σχήμα 8.5),
- $(-1, 1)$
  $$D(-1,1) = -36 < 0$$
  $(-1, 1)$: σαγματικό σημείο,
- $(1, 1)$
  $$D(1,1) = -36 < 0$$
  $(1, 1)$: σαγματικό σημείο.

Ερ `stationary points 3x^2 y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2`

Απ $3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2 = 0$ at $(x, y) = (-1, 1)$ (saddle point)
$3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2 = -2$ at $(x, y) = (0, 2)$ (minimum)
$3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2 = 2$ at $(x, y) = (0, 0)$ (maximum)
$3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2 = 0$ at $(x, y) = (1, 1)$ (saddle point)

■

Παράδειγμα 8-13

Για την συνάρτηση $g(x, y) = x \sin y$ θα είναι:

$$\begin{array}{ll} g_x = \sin y & g_y = x \cos y \\ g_{xx} = 0 & g_{yy} = -x \sin y \\ g_{xy} = \cos y & \end{array}$$

Τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος $g_x = 0$ και $g_y = 0$ ή

$$\begin{array}{ll} \sin y & = 0 \\ x \cos y & = 0 \ , \end{array}$$

δηλαδή τα σημεία

$$(0, n\pi)$$

όπου ο n ακέραιος. Όλα αυτά είναι σαγματικά σημεία, αφού

$$D = g_{xx}g_{yy} - (g_{xy})^2 = -(g_{xy})^2 = -\cos^2 n\pi = -1 < 0 \ .$$

■

Παράδειγμα 8-14

Η συνάρτηση

$$h(x, y) = (x - y)^2$$

έχει $h_x = 2(x - y)$, $h_y = -2(x - y)$, δηλαδή κρίσιμα όλα τα σημεία της ευθείας $x = y$. Επειδή $h_{xx} = 2$, $h_{yy} = 2$ και $h_{xy} = -2$, είναι

$$D(x, y) = 2 \cdot 2 - (-2)^2 = 0$$

για κάθε (x, y) και επομένως το κριτήριο που έχουμε δεν μας λέει κάτι. Από τη μορφή όμως της h παρατηρούμε αμέσως ότι σε ολόκληρη την ευθεία $x = y$ η συνάρτηση ελαχιστοποιείται στο 0 (εικόνα). ■

8.7 Απόλυτα μέγιστα και ελάχιστα

Όταν μια συνάρτηση μίας μεταβλητής είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ τότε έχει σε αυτό το διάστημα μια (απολύτως) ελάχιστη και μια (απολύτως) μέγιστη τιμή. Για να τις βρούμε πρέπει να εξετάσουμε τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση και στα κρίσιμα σημεία αυτού του διαστήματος και στα άκρα a και b.

Αντίστοιχα, *μία συνάρτηση 2 μεταβλητών που είναι συνεχής σε μία κλειστή και φραγμένη περιοχή D του $\mathbb{R}^2$ έχει μια (απολύτως) ελάχιστη και μια (απολύτως) μέγιστη τιμή στην D.* (Κλειστή περιοχή σημαίνει ότι περιλαμβάνει όλα τα σημεία της καμπύλης που την περικλείει [1] και φραγμένη ότι είναι πεπερασμένη.) Για να βρούμε τις ακραίες αυτές τιμές πρέπει να υπολογίσουμε

- τις τιμές της συνάρτησης σε όλα τα κρίσιμα σημεία μέσα στην D και
- τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της συνάρτησης πάνω στην καμπύλη που περικλείει την D.

Η μεγαλύτερη από όλες αυτές τις τιμές είναι το απόλυτο μέγιστο που ζητάμε και η μικρότερη το απόλυτο ελάχιστο.

Παράδειγμα 8-15

Ζητάμε το απόλυτο ελάχιστο και το απόλυτο μέγιστο της

$$f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 6y$$

στην περιοχή $D = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq 16\}$.

Θα βρούμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία της f στην D. Από το σύστημα $f_x = 0$ και $f_y = 0$ θα έχουμε

$$4x = 0 \qquad \text{και} \qquad -2y + 6 = 0$$

και παίρνουμε ως μόνο κρίσιμο σημείο το

- $(0, 3)$ με $f(0, 3) = 9$.

Η καμπύλη που περικλείει την D είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 16$. Εκεί θα έχουμε $x = \pm\sqrt{16 - y^2}$ και η f γίνεται η συνάρτηση μίας μεταβλητής $f_+ = -3y^2 +$

[1] Ή των ευθύγραμμων τμημάτων που την περικλείουν.

$6y + 32$ για το δεξί ημικύκλιο και η $f_- = -3y^2 + 6y + 32$ για το αριστερό. Και για τις δύο $y \in [-4, 4]$ κι επομένως δύο άλλα σημεία για εξέταση είναι τα

- $(0, -4)$ με $f(0, -4) = -40$,
- $(0, 4)$ με $f(0, 4) = 8$.

Τέλος χρειαζόμαστε και τα κρίσιμα σημεία της f_+ (και της f_-) μέσα στο $[-4, 4]$. Είναι

$$f'_\pm = -6y + 6 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \ .$$

Θα έχουμε αντίστοιχα για τις 2 συναρτήσεις $x = \pm\sqrt{16 - 1}$ και παίρνουμε έτσι τα δύο σημεία

- $(\sqrt{15}, 1)$ με $f(\sqrt{15}, 1) = 35$,
- $(-\sqrt{15}, 1)$ με $f(-\sqrt{15}, 1) = 35$.

Συγκρίνοντας τις τιμές της f σε όλα τα σημεία που βρήκαμε βλέπουμε ότι το απόλυτο μέγιστο είναι ίσο με 35 στα σημεία $(\sqrt{15}, 1)$ και $(-\sqrt{15}, 1)$ και το απόλυτο ελάχιστο είναι -40 στο σημείο $(0, -4)$. Και τα τρία σημεία τυχαίνει να ανήκουν στον κύκλο που είναι το όριο της D.

Ερ `maximize 2x^2 - y^2 + 6y on x^2 + y^2 <= 16`

Απ $\max\{2x^2 - y^2 + 6y | x^2 + y^2 \leq 16\} = 35$ at $(x, y) = (-\sqrt{15}, 1)$
$\max\{2x^2 - y^2 + 6y | x^2 + y^2 \leq 16\} = 35$ at $(x, y) = (\sqrt{15}, 1)$

Ερ `minimize 2x^2 - y^2 + 6y on x^2 + y^2 <= 16`

Απ $\min\{2x^2 - y^2 + 6y | x^2 + y^2 \leq 16\} = -40$ at $(x, y) = (0, -4)$

■

Παράδειγμα 8-16

Ζητάμε τρεις θετικούς αριθμούς που να έχουν το μέγιστο γινόμενο, ενώ το άθροισμά τους να είναι 100.

Εδώ έχουμε τη συνάρτηση 3 μεταβλητών

$$f(x, y, z) = xyz$$

αλλά τα πράγματα είναι εντελώς ανάλογα με την περίπτωση των 2 μεταβλητών.

Αν κρατήσουμε και το 0 ως δυνατή τιμή για τα x, y, z θα έχουμε την κλειστή και φραγμένη περιοχή του $\mathbb{R}^3$

$$D = \{(x, y, z) : \; x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, x + y + z = 100\} \; .$$

Παντού στα όρια της D η f θα παίρνει προφανώς την ελάχιστη τιμή της 0. Σε ολόκληρη την D η συνάρτηση γίνεται 2 μεταβλητών με

$$f(x, y) = xy(100 - x - y) = 100xy - x^2y - xy^2 \; .$$

Το σύστημα $f_x = 0$ και $f_y = 0$ μας δίνει

$$y(100 - 2x - y) = 0 \qquad \text{και} \qquad x(100 - x - 2y) = 0 \; .$$

Η λύση $(0, 0)$ είδαμε ήδη τι δίνει και επομένως μας ενδιαφέρει το σύστημα

$$\begin{aligned} 100 - 2x - y &= 0 \\ 100 - x - 2y &= 0 \; , \end{aligned}$$

από το οποίο παίρνουμε το κρίσιμο σημείο $(100/3\,, 100/3)$. Η αντίστοιχη τιμή για το z είναι επομένως κι αυτή $100/3$. Άρα η f μεγιστοποιείται στο

$$\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$$

στην τιμή $10^6/3^3$.

Ερ `maximize xyz on x >= 0, y >= 0, z >= 0, x + y + z = 100`

Απ $\max\{x\,y\,z \,|\, x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z = 100\} = \frac{1000000}{27}$
at $(x, y, z) = (\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3})$

■

8.8 Δεσμευμένα ακρότατα

Όταν χρειάζεται να ελαχιστοποιηθεί ή να μεγιστοποιηθεί μία συνάρτηση πολλών μεταβλητών με τις μεταβλητές να υπόκεινται σε δεσμεύσεις, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των **πολλαπλασιαστών Lagrange**. Για παράδειγμα, μπορεί να ενδιαφερόμαστε για την ελάχιστη τιμή της

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad \text{με} \qquad 2x + y = k \; ,$$

δηλαδή όταν τα (x, y) είναι τα σημεία της ευθείας $2x + y = k$. Η διαδικασία, για μια συνάρτηση 2 μεταβλητών f με τη δέσμευση $g(x, y) = k$, είναι η εξής:

- Λύνουμε το σύστημα των 3 εξισώσεων

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lambda\, g_x(x, y) \\ f_y(x, y) &= \lambda\, g_y(x, y) \\ g(x, y) &= k \end{aligned}$$

  για τους 3 αγνώστους x, y, λ.

- Για το ζεύγος (x, y) κάθε λύσης του συστήματος υπολογίζουμε την τιμή της f. Από αυτές τις τιμές βρίσκουμε τη μέγιστη και την ελάχιστη.

Το λ ονομάζεται πολλαπλασιαστής Lagrange [2] και η τιμή του μας ενδιαφέρει μόνο αν κατά την επίλυση του συστήματος χρειάζεται για να υπολογίσουμε τα x και y. Στη γενική περίπτωση συνάρτησης n μεταβλητών θα έχουμε ένα σύστημα $n + 1$ εξισώσεων με $n + 1$ αγνώστους.

Παράδειγμα 8-17

Για την $f(x, y) = x^2 + y^2$ με $g(x, y) = 2x + y = k$, που αναφέρθηκε, θα έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda \\ 2y &= \lambda \\ 2x + y &= k\ . \end{aligned}$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει $x = \lambda$, η δεύτερη $y = (\lambda/2)$ και αντικαθιστώντας στην τρίτη παίρνουμε

$$2\lambda + \frac{\lambda}{2} = k \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2k}{5}\ .$$

Επομένως το μόνο σημείο που βρίσκουμε είναι το

$$\left(\frac{2}{5}k,\ \frac{1}{5}k\right)\ .$$

Εδώ βρίσκεται το ελάχιστο της f με τον περιορισμό που έχουμε: $f(2k/5, k/5) = k^2/5$. Αυτό επειδή δεν υπάρχει μέγιστο, αφού καθώς η ευθεία εκτείνεται από κάθε μεριά προς το άπειρο η τιμή $x^2 + y^2$ μεγαλώνει απεριόριστα.

[2] Περισσότερους πολλαπλασιαστές έχουμε όταν έχουμε περισσότερες δεσμευτικές σχέσεις.

Ερ `minimize x^2 + y^2 on 2x + y = k`

Απ $\mathtt{min}\{\mathtt{x}^2 + \mathtt{y}^2 \,|\, \mathtt{2x} + \mathtt{y} = \mathtt{k}\} = \frac{\mathtt{k}^2}{5}$ `for` $\mathtt{k} = \mathtt{5y}$
$\mathtt{min}\{\mathtt{x}^2 + \mathtt{y}^2 \,|\, \mathtt{2x} + \mathtt{y} = \mathtt{k}\} = \frac{\mathtt{k}^2}{5}$ `for` $\mathtt{x} = \frac{\mathtt{2k}}{5}$

■

Παράδειγμα 8-18

Θα βρούμε το μέγιστο και το ελάχιστο της $f(x, y) = ax + by$ $(a, b \neq 0)$ στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$.

Εδώ είναι $g(x, y) = x^2 + y^2$ και θα έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} a &= 2\lambda x \\ b &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1 \ . \end{aligned}$$

Αφού $a, b \neq 0$, το λ δεν μπορεί να είναι 0 και διαιρώντας τη δεύτερη εξίσωση με την πρώτη παίρνουμε

$$y = \frac{b}{a} x \ .$$

Αντικαθιστώντας στην τρίτη εξίσωση παίρνουμε για το x ότι

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ .$$

Βρίσκουμε επομένως 2 σημεία:

- Το
$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \ ,$$
όπου η συνάρτηση παίρνει τη μέγιστη τιμή $\sqrt{a^2 + b^2}$
- και το
$$\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \ ,$$
όπου η συνάρτηση παίρνει την ελάχιστη τιμή $-\sqrt{a^2 + b^2}$.

■

Παράδειγμα 8-19

Θα δείξουμε ότι η απόσταση ενός σημείου (x_0, y_0, z_0) από το επίπεδο $Ax+By+Cz+D=0$ είναι ίση με

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} .$$

Η ζητούμενη απόσταση είναι η απόσταση από το (x_0, y_0, z_0) του πιο κοντινού του από τα σημεία του επιπέδου. Πρέπει δηλαδή να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση 3 μεταβλητών

$$f(x,y,z) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$$

υπό την δέσμευση

$$g(x,y,z) = Ax + By + Cz + D = 0 .$$

(Για ευκολία πήραμε ως $f(x,y,z)$ το τετράγωνο της απόστασης ενός τυχαίου σημείου (x,y,z) του επιπέδου από το (x_0, y_0, z_0). Η f φυσικά δεν θα έχει μέγιστο αλλά μόνο ελάχιστο.) Το σύστημα με τον πολλαπλασιαστή Lagrange θα είναι τώρα 4×4:

$$\begin{aligned} 2(x-x_0) &= \lambda A \\ 2(y-y_0) &= \lambda B \\ 2(z-z_0) &= \lambda C \\ Ax + By + Cz + D &= 0 . \end{aligned}$$

Από τις 3 πρώτες εξισώσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} x &= \frac{\lambda}{2} A + x_0 \\ y &= \frac{\lambda}{2} B + y_0 \\ z &= \frac{\lambda}{2} C + z_0 \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στην τέταρτη θα έχουμε

$$A\left(\frac{\lambda}{2} A + x_0\right) + B\left(\frac{\lambda}{2} B + y_0\right) + C\left(\frac{\lambda}{2} C + z_0\right) + D = 0$$

απ΄ όπου θα πάρουμε

$$\frac{\lambda}{2} = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} \ .$$

Αντικαθιστούμε στις προηγούμενες σχέσεις για τα x, y, z και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} x &= -A\,\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} + x_0 \\ y &= -B\,\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} + y_0 \\ z &= -C\,\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} + z_0 \ . \end{aligned}$$

Στο σημείο με αυτές τις συντεταγμένες η f παίρνει την ελάχιστη τιμή

$$\frac{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}$$

και αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. ■

Κεφάλαιο 9

Πολλαπλά ολοκληρώματα

9.1 Ολοκληρώματα σε ορθογώνιες περιοχές

Σε αντιστοιχία με ένα απλό ολοκλήρωμα ένα διπλό ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης f 2 μεταβλητών x και y είναι το όριο ενός αθροίσματος:

- Μία περιοχή $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ με } a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ χωρίζεται σε mn μικρά ορθογώνια εμβαδού $\Delta x\, \Delta y$ (αφού το διάστημα $[a, b]$ χωρίζεται σε m τμήματα μήκους Δx και το $[c, d]$ σε n τμήματα μήκους Δy).

- Τα mn παραλληλεπίπεδα με βάσεις τα μικρά ορθογώνια και ύψος το καθένα ίσο με $f(x_i^*, y_j^*)$ (μέχρι την επιφάνεια που είναι η γραφική παράσταση της f) έχουν συνολικό όγκο

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta x\, \Delta y \ .$$

- Όσο πιο πολλά τα παραλληλεπίπεδα τόσο καλύτερα το διπλό αυτό άθροισμα προσεγγίζει τον *όγκο V μεταξύ της D και της γραφικής παράστασης της f* και τελικά

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta x\, \Delta y \ .$$

Αυτό το όριο ορίζεται ως το **διπλό ολοκλήρωμα** της f στην περιοχή D και συμβολίζεται

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx \ .$$

Όπως ένα απλό ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται συνήθως με χρήση του ορισμού του αλλά με πολύ απλούστερο τρόπο, έτσι και ένα διπλό ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τον τύπο

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx \ .$$

Ολοκληρώνουμε δηλαδή πρώτα ως προς τη μία μεταβλητή και μετά ως προς την άλλη. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και με την αντίστροφη σειρά:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy \ .$$

Όταν ολοκληρώνουμε ως προς μία μεταβλητή αντιμετωπίζουμε την άλλη ως σταθερά.

Όλα αυτά γενικεύονται σε συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών για τριπλά ολοκληρώματα, τετραπλά κλπ.

Αν ολοκληρώσουμε την συνάρτηση μίας μεταβλητής $f(x) = 1$ σε ένα διάστημα $[a, b]$ βρίσκουμε το μήκος του διαστήματος. Αντίστοιχα:

- Το *εμβαδόν* μιας περιοχής D του $\mathbb{R}^2$ δίνεται από τον τύπο

$$\int\int_D dx\, dy \ .$$

- Ο *όγκος* μιας περιοχής D του $\mathbb{R}^3$ δίνεται από τον τύπο

$$\int\int\int_D dx\, dy\, dz \ .$$

(Τα όρια των ολοκληρώσεων καθορίζουν κάθε φορά την περιοχή.)

Παράδειγμα 9-1

$$\begin{aligned}\int_1^2 \int_2^3 (x^2+3y)\,dx\,dy &= \int_1^2 \left(\int_2^3 (x^2+3y)\,dx\right) dy \\ &= \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3}+3xy\right]_2^3 dy \\ &= \int_1^2 \left(\frac{19}{3}+3y\right) dy \\ &= \left[\frac{19y}{3}+\frac{3y^2}{2}\right]_1^2 \\ &= \frac{65}{6}\end{aligned}$$

Ερ `int (x^2 + 3y) dx dy, x = 2 to 3, y = 1 to 2`

Απ $\int_1^2 \int_2^3 (\mathrm{x}^2+3\mathrm{y})\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \frac{65}{6} \approx 10.8333$

■

Παράδειγμα 9-2

Όταν η συνάρτηση των x, y είναι ίση με το γινόμενο μίας συνάρτησης του x επί μία συνάρτηση του y, το διπλό ολοκλήρωμα γίνεται ένα γινόμενο δύο απλών ολοκληρωμάτων:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \int_2^3 (x^2\,3y)\,dx\,dy &= \left(\int_1^2 y\,dy\right)\left(\int_2^3 3x^2\,dx\right) \\ &= \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 \left[x^3\right]_2^3 \\ &= \frac{3}{2}\,19 = \frac{57}{2}\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 9-3

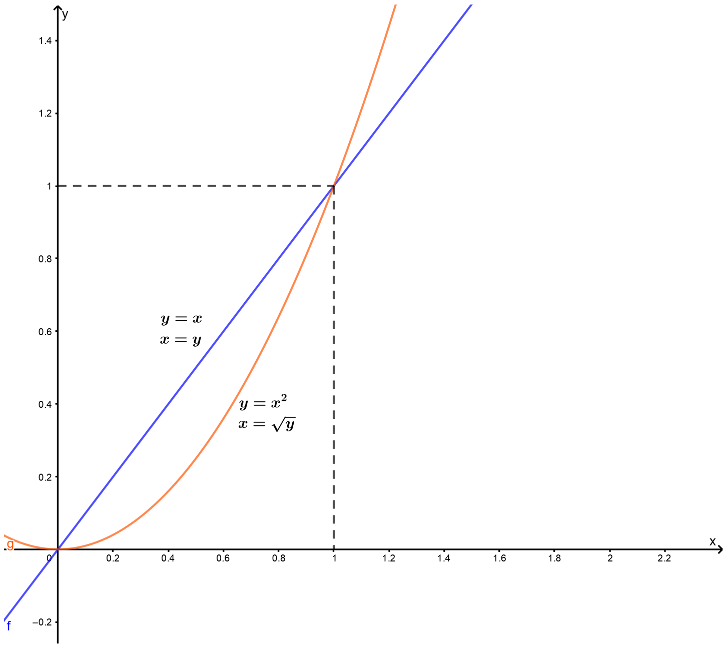
$$\begin{aligned}
\int_0^2\int_0^1\int_0^1 (x^3+y^2+z)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^2\int_0^1 \left(\int_0^1 (x^3+y^2+z)\,dx\right) dy\,dz \\
&= \int_0^2\int_0^1 \left[\frac{x^4}{4}+(y^2+z)x\right]_0^1 dy\,dz \\
&= \int_0^2\int_0^1 \left(\frac{1}{4}+y^2+z\right) dy\,dz \\
&= \int_0^2 \left[\left(\frac{1}{4}+z\right)y+\frac{y^3}{3}\right]_0^1 dz \\
&= \int_0^2 \left(\frac{7}{12}+z\right) dz \\
&= \left[\frac{7z}{12}+\frac{z^2}{2}\right]_0^2 \\
&= \frac{19}{6}
\end{aligned}$$

Ερ `int (x^3 + y^2 + z) dx dy dz, x = 0 to 1, y = 0 to 1, z = 0 to 2`

Απ $\int_0^2\int_0^1\int_0^1 (\mathrm{x}^3+\mathrm{y}^2+\mathrm{z})\,\mathrm{dx\,dy\,dz} = \frac{19}{6} \approx 3.16667$

Παράδειγμα 9-4

$$\begin{aligned}
\int_\pi^{2\pi}\int_0^\pi (\sin x+\cos y)\,dx\,dy &= \int_\pi^{2\pi} \left[-\cos x + x\cos y\right]_0^\pi dy \\
&= \int_\pi^{2\pi} (2+\pi\cos y)\,dy \\
&= \left[2y+\pi\sin y\right]_\pi^{2\pi} dy \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$



Σχήμα 9.1: Η περιοχή ολοκλήρωσης περικλείεται από τα τμήματα της παραβολής $y = x^2$ και της ευθείας $y = x$ για $0 \leq x \leq 1$

Ερ `int (sin(x) + cos(y)) dx dy, x = 0 to pi, y = pi to 2pi`

Απ $\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin(x) + \cos(y))\, dx\, dy = 2\pi \approx 6.28319$

9.2 Ολοκληρώματα σε μη ορθογώνιες περιοχές

Όταν η περιοχή ολοκλήρωσης στο $\mathbb{R}^2$ δεν είναι ορθογώνια, τα όρια ολοκλήρωσης της μίας μεταβλητής, έστω της y, είναι συναρτήσεις της άλλης. Τότε ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς y και μετά (μεταξύ δύο σταθερών ορίων) ως προς x. Μπορούμε πάλι να ολοκληρώσουμε με την αντίστροφη σειρά. Τότε θα είναι τα όρια της x συναρτήσεις του y (οι αντίστροφες συναρτήσεις των προηγούμενων). Οι δύο τρόποι ολοκλήρωσης μπορεί όμως να μην είναι το ίδιο εύκολοι.

Παράδειγμα 9-5

Θα υπολογίσουμε την επιφάνεια E κάτω από την ευθεία $y = x$ και πάνω από την παραβολή $y = x^2$ (διάστημα ολοκλήρωσης για το x το $[0, 1]$, σχήμα 9.1) ως ένα διπλό ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\, dx \\ &= \int_0^1 (x - x^2)\, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \,. \end{aligned}$$

Αν αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, θα είναι τώρα τα όρια του y το 0 και το 1, ενώ τα όρια του x θα είναι τα y και $\sqrt{y}$:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} dx\, dy \\ &= \int_0^1 (\sqrt{y} - y)\, dx \\ &= \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \,. \end{aligned}$$

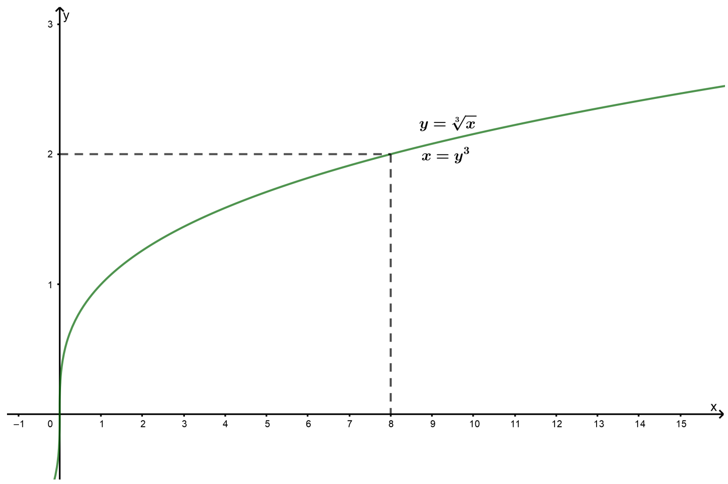
■

Παράδειγμα 9-6

Το ολοκλήρωμα (με περιοχή ολοκλήρωσης στο σχήμα 9.2)

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{dy\, dx}{y^4 + 1}$$

είναι δύσκολο να υπολογιστεί με αυτή τη σειρά ολοκλήρωσης. Γίνεται όμως



Σχήμα 9.2: Η περιοχή ολοκλήρωσης περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt[3]{x}$, την ευθεία $y = 2$ και τον άξονα των y

απλό με την άλλη σειρά:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{dx\,dy}{y^4+1} &= \int_0^2 \frac{1}{y^4+1}\left(\int_0^{y^3} dx\right) dy \\
&= \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1}\, dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{d(y^4+1)}{y^4+1} \\
&= \frac{1}{4}\left[\ln\left(y^4+1\right)\right]_0^2 = \frac{1}{4}\ln 17 \approx 0.708\ .
\end{aligned}$$

Ερ `int 1/(y^4 + 1) dy dx, y =3th root of x to 2, x = 0 to 8`

Απ $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\, dy\, dx = 0.708303$

■

9.3 Ολοκληρώματα με πολικές συντεταγμένες

Σε περιπτώσεις όπου στο ολοκλήρωμα υπάρχει κάποια κυκλική συμμετρία είναι πιθανότατα βολικό να το υπολογίσουμε αλλάζοντας τις καρτεσιανές συντεταγμένες με πολικές. Αντικαθιστούμε:

- $x \longrightarrow r\cos\phi$,
- $y \longrightarrow r\sin\phi$
- και (προσοχή στο r!) $dx\,dy \longrightarrow rdr\,d\phi$.

Παράδειγμα 9-7

Θα υπολογίσουμε τον όγκο V που περικλείεται από το επίπεδο $x-y$ και το παραβολοειδές $z = 10 - x^2 - y^2$ (σχήμα 9.3).

Η τομή των δύο επιφανειών προκύπτει από τη σχέση

$$0 = 10 - x^2 - y^2 \ ,$$

είναι δηλαδή ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt{10}$. Αυτός περικλείει την περιοχή ολοκλήρωσης. Έχουμε

$$\begin{aligned} V = \int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} \int_{-\sqrt{10-x^2}}^{\sqrt{10-x^2}} (10 - x^2 - y^2)\,dy\,dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{10}} (10 - r^2)\,rdr\,d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{10}} (10r - r^3)\,dr\,d\phi \\ &= 2\pi \left[5r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{10}} \\ &= 50\pi \ . \end{aligned}$$

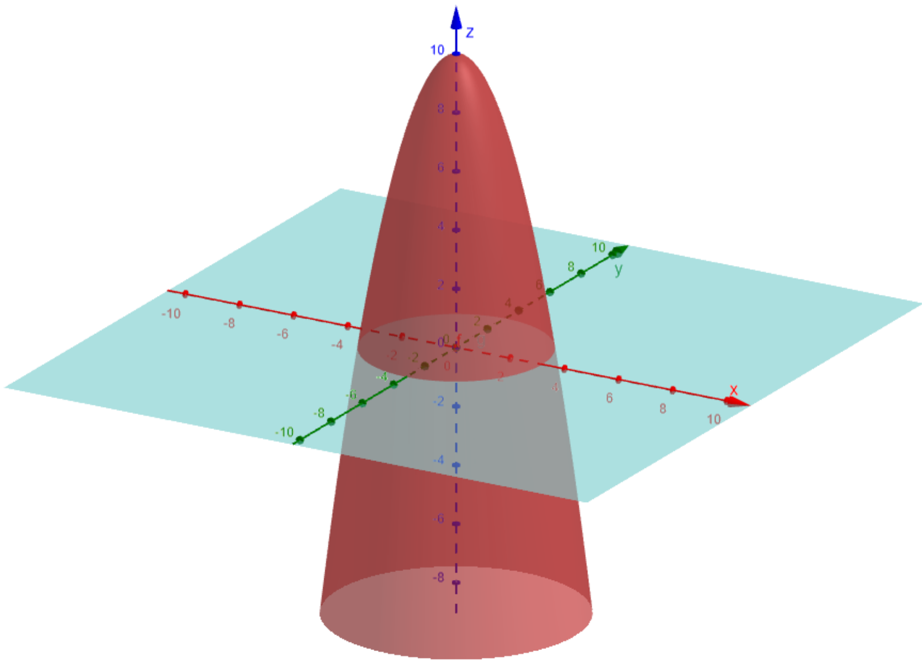
■

Παράδειγμα 9-8

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \ ,$$

που αναφέρθηκε στο παράδειγμα 5-3, υπολογίζεται ως εξής: Έστω ότι η τιμή



Σχήμα 9.3: Το παραβολοειδές $z = 10 - x^2 - y^2$ και το επίπεδο $z = 0$

του είναι ίση με I. Έχουμε

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy \\ &= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-r^2} r dr\, d\phi \\ &= 2\pi \int_{0}^{\infty} e^{-r^2} r dr \\ &= \pi \int_{0}^{\infty} e^{-r^2} d(r^2) \\ &= -\pi \left[e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \pi \ . \end{aligned}$$

Επομένως $I = \sqrt{\pi}$. ■

Παράδειγμα 9-9

Στο ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx$$

έχουμε ότι τα όρια για την y είναι το κάτω ημικύκλιο του κύκλου $x^2+y^2=1$ και η ευθεία $y=0$ (ο άξονας των x). Τα όρια για την x είναι οι ευθείες $x=-1$ και $x=0$ (ο άξονας των y). Επομένως η περιοχή ολοκλήρωσης είναι το ευρισκόμενο στο τρίτο τεταρτημόριο ένα τέταρτο του κυκλικού δίσκου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. Έτσι, το ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες γίνεται

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0}^{1} \frac{2}{1+r} r dr\, d\phi &= \pi \int_{0}^{1} \frac{r}{r+1}\, dr \\ &= \pi \left[(r+1) - \ln{(r+1)} \right]_0^1 \\ &= \pi(1-\ln 2) \ . \end{aligned}$$

Ερ `int 2/(1 + sqrt(x^2 + y^2)) dy dx, y = -sqrt(1 - x^2) to 0, x = -1 to 0`

Απ $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx = 0.964006$

Ερ `int 2x/(1 + x) dx dy, x = 0 to 1, y = pi to 3pi/2`

Απ $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{0}^{1} \frac{2x}{1+x}\, dx\, dy = \pi - \pi \log(2) \approx 0.964007$

■

Παράδειγμα 9-10

Το ολοκλήρωμα

$$\int_D\int e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy \ ,$$

όπου D η περιοχή που περικλείεται από το ημικύκλιο $x = \sqrt{4-y^2}$ (με ακτίνα ίση με 2) και τον άξονα των y, σε πολικές συντεταγμένες γίνεται:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 e^{-r^2}\, rdr\, d\phi &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \quad \int_0^2 e^{-r^2}\, rdr \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^2 e^{-r^2}\, d(r^2) \\
&= \frac{\pi}{2}\left[-e^{-r^2}\right]_0^2 \\
&= \frac{\pi}{2}\left(1-e^{-4}\right) \ .
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 9-11

Θα βρούμε τον όγκο πάνω από τον κώνο $z = \sqrt{x^2+y^2}$ και κάτω από τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2 = 1$ (σχήμα 9.4).

Θέτοντας $z^2 = x^2+y^2$ από την εξίσωση του κώνου, παίρνουμε από την εξίσωση της σφαίρας $2x^2+2y^2 = 1$ ή $x^2+y^2 = (1/\sqrt{2})^2$, που είναι η εξίσωση του κύκλου-τομής των δύο επιφανειών. Οι επιφάνειες είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ (σφαίρα) και $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

(κώνος) και ο ζητούμενος όγκος είναι

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{(1/\sqrt{2})^2-x^2}}^{\sqrt{(1/\sqrt{2})^2-x^2}} \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right) dy\, dx \\
&= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{(1/\sqrt{2})^2-x^2}}^{\sqrt{(1/\sqrt{2})^2-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dy\, dx \\
&- \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{(1/\sqrt{2})^2-x^2}}^{\sqrt{(1/\sqrt{2})^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx \ .
\end{aligned}$$

Σε πολικές συντεταγμένες το πρώτο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-r^2}\ r dr\, d\phi &= -\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-r^2)^{\frac{1}{2}}\, d(1-r^2) \\
&= \pi \left[\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \ .
\end{aligned}$$

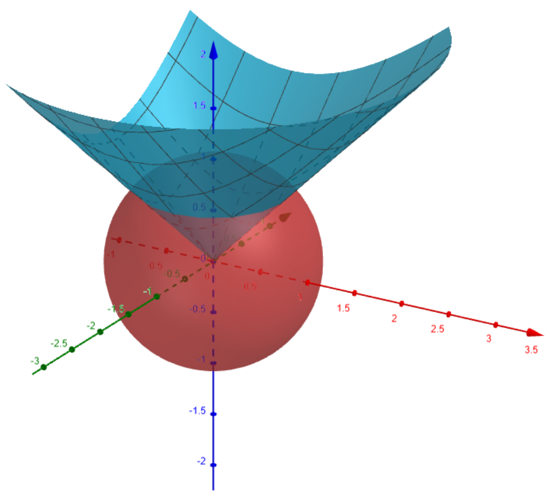
Το δεύτερο γίνεται

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\ r dr\, d\phi &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^2\, dr \\
&= 2\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \ .
\end{aligned}$$

Επομένως θα έχουμε

$$V = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ .$$

■



Σχήμα 9.4: Η σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και ο κώνος $z = \sqrt{x^2 + y^2}$