Ιόνιο Πανεπιστήμιο - Τμήμα Πληροφορικής

Μαθηματικός Λογισμός

Ενότητα: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ-
ΠΟΛΛΑΠΛΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παναγιώτης Βλάμος

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Ιόνιο Πανεπιστήμιο»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Παράδειγμα 10

Να υπολογίσετε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+(z-2)^2}$$

όπου D είναι το εσωτερικό της σφαίρας $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

Λύση :

Θεωρώντας τις σφαιρικές συντεταγμένες (r,φ,θ), το εσωτερικό της σφαίρας D είναι το σύνολο :

$$T=\{(r,\varphi,\theta): 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi\}$$

και $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$.

Τότε $x^2+y^2+(z-2)^2=r^2-4r\cos\theta+4$.

Αντικαθιστούμε στο τριπλό ολοκλήρωμα και έχουμε ότι

$$I=\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+(z-2)^2}=\iiint_T \frac{-r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta}{r^2-4r\cos\theta+4}=$$

$$=\int_0^1 r^2\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{d(\cos\theta)}{r^2-4r\cos\theta+4}\right)d\varphi\right)dr=\int_0^1 r^2\left(\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{4r}\int_0^{\pi}\frac{d(r^2-4r\cos\theta+4)}{r^2-4r\cos\theta+4}\right)d\varphi\right)dr=$$

$$=\int_0^1 r^2\left(\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{4r}\left[\ln\left|r^2-4r\cos\theta+4\right|\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}\right)d\varphi\right)dr=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 r\left[\ln\left((r-2)^2\right)-\ln\left((r+2)^2\right)\int_0^{2\pi}d\varphi\right]dr=\frac{\pi}{2}\int_0^1 r\left[\ln\left((r-2)^2\right)-\ln\left((r+2)^2\right)\right]dr=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 r\ln\left((r-2)^2\right)dr-\frac{\pi}{2}\int_0^1 r\ln\left((r+2)^2\right)dr=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2(r-2)^2}+2(r-2)\ln\left((r-2)^2\right)-4r\right]_0^1-\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2(r+2)^2}-2(r+2)\ln\left((r+2)^2\right)+4r\right]_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(12\ln 3-16\ln 2-\frac{68}{9}\right).$$

Παράδειγμα 11

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που περικλείεται από τις επιφάνειες

$$z = x + y,\ z = 6,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$$

Λύση :

Το στερεό δίνεται από το σύνολο :

$$A = \{(x, y, z) : 0 \le x \le z - y,\ 0 \le y \le z,\ 0 \le z \le 6\}$$

Αρα ο όγκος του στερεού ισούται με

$$V = \iiint_A dx dy dz = \int_0^6 \left(\int_0^z \left(\int_0^{z-y} dx \right) dy \right) dz = \int_0^6 \left(\int_0^z (z - y) dy \right) dz =$$

$$= \int_0^6 \left[zy - \frac{y^2}{2} \right]_0^z dz = \int_0^6 \left(z^2 - \frac{z^2}{2} \right) dz = \frac{1}{2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^6 = 36$$

Παράδειγμα 12

Να υπολογίσετε το $\iint_R f(x, y) dA$ για τη συνάρτηση $f(x,y)=1-6x^2y$ και το χωρίο R: $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$.

Λύση :

Εχουμε ότι

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{-1}^{1} \int_0^2 (1 - 6x^2 y) dx\ dy = \int_{-1}^{1} [x - 2x^3 y]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} (2 - 16y) dy = [2y - 8y^2]_{-1}^{1} = 4 \text{ κυβικές μονάδες.}$$

Αντιστρέφοντας τη σειρά ολοκλήρωσης παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα :

$$\int_0^2 \int_{-1}^{1} (1 - 6x^2 y)\, dy\, dx = \int_0^2 [y - 3x^2 y^2]_{y=-1}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^2 [(1 - 3x^2) - (-1 - 3x^2)] dx$$

$$= \int_0^2 2dx = 4 \text{ κυβικές μονάδες.}$$

Παράδειγμα 13
Να βρείτε τον όγκο του πρίσματος του οποίου η βάση είναι το τριγωνικό χωρίο στο επίπεδο xy που φράσσεται από τον άξονα x’x και από τις ευθείες y=x και x=1, και του οποίου η πάνω πλευρά ανήκει στο επίπεδο z = f(x, y)=3-x-y.

Λύση :
Για κάθε x μεταξύ 0 και 1, το y μπορεί να μεταβάλλεται από y=0 έως y=x. Έτσι,

$$V = \int_0^1\int_0^x (3-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1\left[3y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1\left(3x - \frac{3x^2}{2}\right)dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = 1 \text{ κυβική μονάδα.}$$

Αν αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, το ολοκλήρωμα του όγκου γίνεται

$$V = \int_0^1\int_y^1 (3-x-y)\,dx\,dy = \int_0^1\left[3x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=y}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1\left(3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$= \int_0^1\left(\frac{5}{2} - 4y + \frac{3}{2}y^2\right)dy = \left[\frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{y^3}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = 1 \text{ κυβική μονάδα.}$$

Παράδειγμα 14
Να υπολογίσετε το

$$\iint_R \frac{\sin x}{x}\,dA,$$

όπου R είναι το τρίγωνο του επιπέδου xy που φράσσεται από τον άξονα x’x, την ευθεία y = x, και την ευθεία x = 1.

Λύση :
Αν ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y και κατόπιν ως προς x, βρίσκουμε

$$\int_0^1\left(\int_0^x \frac{\sin x}{x}dy\right)dx = \int_0^1\left(y = \frac{\sin x}{x}\right]_{y=0}^{y=x}\right) dx = \int_0^1 \sin x\,dx$$

$$= -\cos(1) + 1 \approx 0{,}46 \text{ κυβικές μονάδες.}$$

Αν αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το

$$\int_0^1\int_y^1 \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy,$$

τότε αδυνατούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό, δεδομένου ότι το sinx/x δε μπορεί να εκφραστεί μέσω στοιχειωδών συναρτήσεων.

Δεν υπάρχει κάποιος γενικός κανόνας που να μας λέει ως προς ποια μεταβλητή θα πρέπει να ολοκληρώσουμε πρώτα, απλώς αν στην πορεία δείτε ότι η σειρά ολοκλήρωσης που επιλέξατε δεν οδηγεί πουθενά, αντιστρέψτε την.

Παράδειγμα 15

Να σχεδιάσετε το χωρίο ολοκλήρωσης του

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2)\, dy\, dx$$

και να γράψετε ένα ισοδύναμο ολοκλήρωμα με τη σειρά ολοκλήρωσης αντεστραμμένη.

Λύση :

Το χωρίο ολοκλήρωσης δίνεται από τις ανισότητες $x^2 \le y \le 2x$ και $0 \le x \le 2$. Πρόκειται λοιπόν για το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = 2x$ από $x = 0$ έως $x = 2$.

Για να βρούμε τα όρια ολοκλήρωσης όταν αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, θεωρούμε μια οριζόντια ευθεία που τέμνει το χωρίο από τα αριστερά προς τα δεξιά. Η ευθεία εισέρχεται στο χωρίο για $x = y/2$ και εξέρχεται για $x = \sqrt{y}$. Για να συμπεριλάβουμε όλες τις ευθείες τέτοιου τύπου στον υπολογισμό μας, δίνουμε στο y τιμές από $y = 0$ έως $y = 4$. Το ολοκλήρωμα είναι

$$\int_0^1 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2)\, dx\, dy.$$

Και τα δύο ολοκληρώματα έχουν την τιμή 8.

Παράδειγμα 16

Να βρείτε τα όρια ολοκλήρωσης της $f(r,\theta)$ στο χωρίο της R που βρίσκεται εντός της καρδιοειδούς καμπύλης $r = 1 + \cos\theta$ και εκτός του κύκλου $r = 1$.

Λύση :

Σχεδιάζουμε το χωρίο και σημειώνουμε στο σχήμα τις συνοριακές καμπύλες. Μια τυπική πολική ημιευθεία (με αφετηρία την αρχή) εισέρχεται στο χωρίο R για $r = 1$ και εξέρχεται για $r = 1 + \cos\theta$.

Οι πολικές ημιευθείες με αφετηρία την αρχή που τέμνουν το χωρίο R καλύπτουν τις τιμές από $\theta = -\frac{\pi}{2}$ έως $\theta = \frac{\pi}{2}$. Το ολοκλήρωμα είναι

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{1+\cos\theta} f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Αν η $f(r,\theta)$ είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή 1, τότε το ολοκλήρωμα της f στο χωρίο R ισούται με το εμβαδόν του R.

Παράδειγμα 17

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον λημνίσκο $r^2 = 4\cos\ 2\theta$.

Λύση :

Σχεδιάζουμε τον λημνίσκο για να προσδιορίσουμε τα όρια της ολοκλήρωσης. Το συνολικό ζητούμενο εμβαδόν είναι τετραπλάσιο του εμβαδού που περιέχεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r\ dr\ d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{4\cos 2\theta}} d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\theta\ d\theta = 4\sin 2\theta = 4\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 4$$

.

Παράδειγμα 18

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\int_R e^{x^2+y^2} dy\ dx$, όπου R είναι το ημικυκλικό χωρίο που φράσσεται από τον άξονα x'x και από την καμπύλη $y = \sqrt{1-x^2}$.

Λύση :

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, πρόκειται για ένα μη στοιχειώδες ολοκλήρωμα και δεν υπάρχει άμεσος τρόπος να ολοκληρώσουμε την ποσότητα $e^{x^2+y^2}$ ως προς το x ή το y. Ωστόσο, το ολοκλήρωμα αυτό έχει μεγάλη σημασία για τα Μαθηματικά – εμφανίζεται στη στατιστική, για παράδειγμα – και χρειαζόμαστε έναν τρόπο υπολογισμού του. Οι πολικές συντεταγμένες λύνουν το πρόβλημα. Αντικαθιστώντας $x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$ και θέτοντας όπου $dy\ dx$ το $r\ dr\ d\theta$, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\int\int_R e^{x^2+y^2} dydx = \int_0^{\pi}\int_0^1 e^{r^2} r\ dr\ d\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}(e-1)d\theta = \frac{\pi}{2}(e-1).$$

Εξαιτίας του παράγοντα r στο γινόμενο $r\ dr\ d\theta$ μπορέσαμε να ολοκληρώσουμε την ποσότητα e^{r^2} . Χωρίς τον παράγοντα αυτόν, δεν θα μπορούσαμε να κάνουμε τίποτα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Αφού σχεδιάσετε το χωρίο ολοκλήρωσης, υπολογίστε το ολοκλήρωμα σε καθεμία από τις Ασκήσεις 1-10.

1. $\int_0^3\int_0^2 (4-y^2)\, dy\, dx$

2. $\int_0^3\int_{-2}^0 (x^2y-2xy)\, dy\, dx$

3. $\int_{-1}^0\int_{-1}^1 (x+y+1)\, dx\, dy$

4. $\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin x + \cos y)\, dx\, dy$

5. $\int_0^{\pi}\int_0^{x} x \sin y\, dy\, dx$

6. $\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} y\, dy\, dx$

7. $\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}\, dx\, dy$

8. $\int_1^2\int_y^{y^2} dx\, dy$

9. $\int_0^1\int_0^{y^2} 3y^3e^{xy}\, dx\, dy$

10. $\int_1^4\int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2}e^{y/\sqrt{x}}\, dy\, dx$

Σε καθεμία από τις ασκήσεις 11 – 14 δίνεται ένα ολοκλήρωμα ορισμένο σε μια περιοχή του καρτεσιανού επιπέδου. Σχεδιάστε την περιοχή αυτή και υπολογίστε το ολοκλήρωμα.

11. $\int_{-2}^0\int_{\upsilon}^{-\upsilon} 2\, dp\, d\upsilon$ (επίπεδο ρυ)

12. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-s^2}} 8t\, dt\, ds$ (επίπεδο st)

13. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\sec t} 3\cos t\, du\, dt$ (επίπεδο tu)

14. $\int_0^3\int_1^{4-2u} \frac{4-2u}{\upsilon^2} du\, du$ (επίπεδο uυ)

Στις ασκήσεις 15 – 24, σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης και γράψτε ένα ισοδύναμο διπλό ολοκλήρωμα με τη σειρά ολοκλήρωσης αντεστραμμένη.

15. $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dy\,dx$

16. $\int_0^2 \int_{y-2}^0 dx\,dy$

17. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx\,dy$

18. $\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} dy\,dx$

19. $\int_0^1 \int_1^{e^x} dy\,dx$

20. $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 dx\,dy$

21. $\int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^{9-4x^2} 16x\,dy\,dx$

22. $\int_0^2 \int_0^{4-y^2} y\,dx\,dy$

23. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y\,dx\,dy$

24. $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x\,dy\,dx$

Στις ασκήσεις 25 – 34, σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης, αντιστρέψτε τη σειρά ολοκλήρωσης και υπολογίστε το ολοκλήρωμα.

25. $\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$

26. $\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin xy\,dy\,dx$

27. $\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy}\,dx\,dy$

28. $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$

29. $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\ln 3}} 3^{x^2}\,dx\,dy$

30. $\int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx$

31. $\int_0^{\frac{1}{16}} \int_{y^{\frac{1}{4}}}^{\frac{1}{2}} \cos\left(16\pi x^5\right) dx\,dy$

32. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1}$

33. Τετραγωνική περιοχή $\iint_R \left(y-2x^2\right) dA$ όπου R είναι το χωρίο που φράσσεται από το τετράγωνο $|x|+|y|=1$.

34. Τριγωνική περιοχή $\iint_R xy\, dA$ όπου R είναι το χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες $y = x$, $y = 2x$ και $x + y = 2$.
35. Βρείτε τον όγκο του χωρίου που φράσσεται από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και βρίσκεται κάτω από το τρίγωνο που ορίζουν οι ευθείες $y = x$, $x = 0$ και $x + y = 2$ του επιπέδου xy.
36. Βρείτε τον όγκο του στερεού που είναι άνω φραγμένο από τον κύλινδρο $z = x^2$ και κάτω φραγμένο από το χωρίο που ορίζουν η παραβολή $y = 2 - x^2$ και η ευθεία $z = x$ του επιπέδου xy.
37. Βρείτε τον όγκο του στερεού που έχει βάση το χωρίο του επιπέδου xy που φράσσεται από την παραβολή $y = 4 - x^2$ και την ευθεία $y = 3x$, ενώ η πάνω πλευρά του στερεού φράσσεται από το επίπεδο $z = x + 4$.

Στις ασκήσεις 38 – 50, μετατρέψτε το καρτεσιανό ολοκλήρωμα σε ένα ισοδύναμό του πολικό ολοκλήρωμα. Στη συνέχεια υπολογίστε το πολικό ολοκλήρωμα.

38. $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx$
39. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx$
40. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$
41. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left(x^2 + y^2\right) dy\, dx$
42. $\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{-\sqrt{\alpha^2-x^2}}^{\sqrt{\alpha^2-x^2}} dy\, dx$
43. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$
44. $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y} x\, dx\, dy$
45. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} y\, dy\, dx$
46. $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \dfrac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy\, dx$
47. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \dfrac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx\, dy$
48. $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx\, dy$
49. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{\left(-x^2+y^2\right)} dy\, dx$
50. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} dy\, dx$