Ιόνιο Πανεπιστήμιο - Τμήμα Πληροφορικής

Μαθηματικός Λογισμός

Ενότητα: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ-
ΠΟΛΛΑΠΛΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ-
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Παναγιώτης Βλάμος

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Ιόνιο Πανεπιστήμιο»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Παράδειγμα 1

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\iint\limits_B xydxdy$ όπου B το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των παραβολών $y = 2x^2 - 4x$, $y = 2x - x^2$

Λύση :

Παρατηρούμε πως αν $y_1(x) = 2x^2 - 4x$, $y_2(x) = 2x - x^2$ τότε

$y_1(x) = y_2(x) \Leftrightarrow x = 0$, $x = 2$ και $y_2(x) > y_1(x) \Leftrightarrow 0 < x < 2$

Επομένως : $B = \left\{ \left(x, y \right) \ni 0 \le x \le 2 \text{ , } 2x - x^2 \le y \le 2x^2 - 4x \right\}$ και

$$\iint\limits_B xydxdy = \int\limits_{x=0}^{x=2} \left(\int\limits_{y=2x^2-4x}^{y=2x-x^2} xydy \right) dx = \int\limits_{x=0}^{x=2} \left(x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=2x^2-4x}^{y=2x-x^2} \right) dx = \int\limits_{x=0}^{x=2} \left(-\frac{3}{2} x^5 + 6x^4 - 6x^3 \right) dx$$

αφού

$$\left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=2x^2-4x}^{y=2x-x^2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(2x - x^2 \right)^2 - \left(2x^2 - 4x \right)^2 \right\} = \frac{1}{2} \left(2x - x^2 + 2x^2 - 4x \right) \left(2x - x^2 - 2x^2 + 4x \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(x^2 - 2x \right) \left(-3x^2 + 6x \right) = \frac{1}{2} x^2 \left(x - 2 \right) \left(-3x + 6 \right) = \frac{1}{2} x^2 \left(-3x^2 + 12x - 12 \right)$$

και τελικά $\iint\limits_B xydxdy = \frac{8}{5}$.

Παράδειγμα 2

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\iint\limits_D xydxdy$ όπου το D χωρίο που περικλείεται από τον άξονα x'x και τις παραβολές με εξισώσεις $y^2 = 4x$, $y^2 = 5 - x$.

Λύση :

Παρατηρούμε πως αν $x_1(y) = \frac{y^2}{4}$, $x_2(y) = 5 - y^2$ τότε $x_1(y) = x_2(y) \Leftrightarrow y = \pm 2$ και $x_1(y) < x_2(y) \Leftrightarrow -2 < y < 2$. Επομένως

$$D = \left\{ \left(x, y \right) \text{ με } 0 \le y \le 2 \text{ , } \frac{y^2}{4} \le x \le 5 - y^2 \right\} \text{ ή}$$

$$\tilde{D} = \left\{ \left(x, y \right) \text{ με } -2 \le y \le 0 \text{ , } \frac{y^2}{4} \le x \le 5 - y^2 \right\}$$

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_{y=0}^{y=2} \left(\int\limits_{x=\frac{y^2}{4}}^{x=5-y^2} xydx \right) dy = \int\limits_{y=o}^{y=2} \left(y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=\frac{y^2}{4}}^{x=5-y^2} \right) dy = \frac{1}{2} \int\limits_{y=0}^{y=2} \left(\frac{15}{16} y^9 - 10y^3 + 25y \right) dy = 10$$

Με τι ισούται το $\iint\limits_{\tilde{D}} xydxdy$;

Παράδειγμα 3

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\iint\limits_R f(x,y)dxdy$ όπου το χωρίο R περικλείεται από τις ευθείες $y=0,\ y=2x,\ x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ και $f(x,y)=\cos(\pi x^2)$.

Επιχειρήστε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \cos(\pi x^2)dx$!

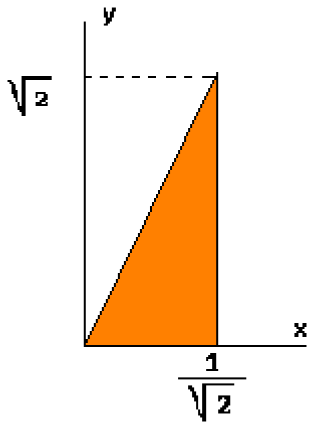
Λύση :

Αλλά

$$R=\left\{(x,y)\ \ με\ \ 0\le x\le \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0\le y\le 2x\right\}$$

και

$$R=\left\{(x,y)\ \ με\ \ 0\le y\le \sqrt{2}\ ,\ \frac{y}{2}\le x\le \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$



$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy=\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_{y/2}^{1/\sqrt{2}}\cos(\pi\ x^2)dx\right)dy=\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\int_0^{2x}\cos(\pi\ x^2)dy\right)dx$$

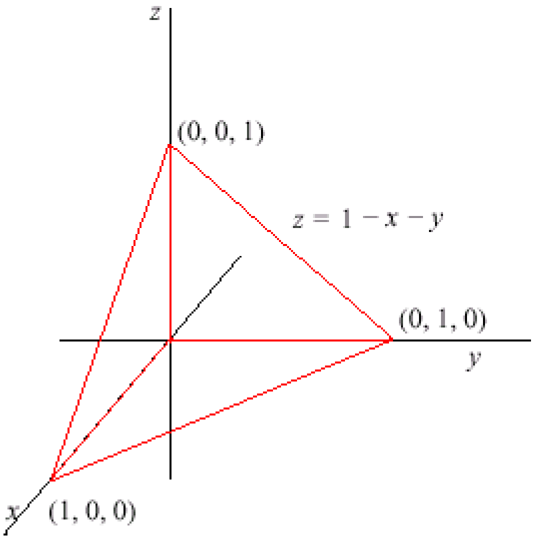
$$=\int_0^{1/\sqrt{2}}2x\cos(\pi\ x^2)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}}\cos(\pi\ x^2)d\left(\pi x^2\right)=\frac{1}{\pi}$$

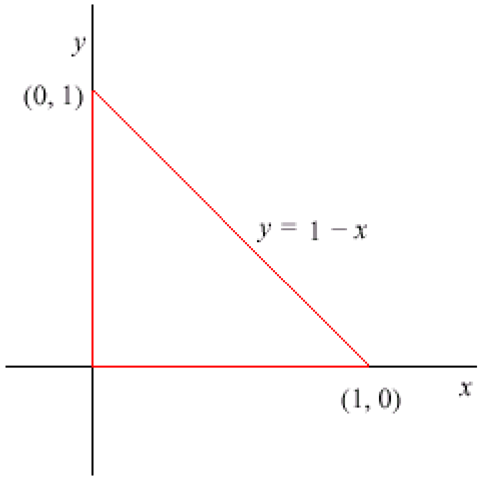
Παράδειγμα 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\iiint_R xyz\,dxdydz$ όπου R το χωρίο που περικλείεται από τα επίπεδα $x=0,\ y=0,\ z=1-x-y.$

Λύση :

Η προβολή D του χωρίου στο επίπεδο xy περικλείεται από τις ευθείες γραμμές $x=0,\ y=0,\ y=1-x$





$$\iiint_R xyz\,dxdydz = \iint_D xy\left(\int_{z=0}^{z=1-x-y} z\,dz\right)dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left.\frac{xyz^2}{2}\right|_0^{1-x-y} dydx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{xy(1-x-y)^2}{2} dydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} (xy - 2x^2y + x^3y + 2x^2y^2 + xy^3)dydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left.\left(\frac{xy^2}{2} - 2x^2y^2 + \frac{x^3y^2}{2} + \frac{2x^2y^3}{3} + \frac{xy^4}{4}\right)\right|_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{3x}{4} - \frac{10x^2}{3} + \frac{9x^3}{2} - 2x^4 + \frac{x^5}{12}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left.\left(\frac{3x^2}{8} - \frac{10x^3}{9} + \frac{9x^4}{8} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^6}{72}\right)\right|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} - \frac{10}{9} + \frac{9}{8} - \frac{2}{5} + \frac{1}{72}\right)$$

$$= \frac{1}{720}.$$

Παράδειγμα 5

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\iint_T \left(x^2+y^2\right)\,dxdy$ όπου T η περιοχή του 1[ου] τεταρτημορίου του Καρτεσιανού επιπέδου μεταξύ δύο κύκλων με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνες 1 και 2 αντίστοιχα.

Λύση :

Το χωρίο T μπορεί να εκφραστεί με τους ακόλουθους τρόπους:

$T = S_1 \cup S_2$

$$S_1 = \left\{ (x,y) \text{ με } 0 \le x \le 1 ,\ \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \le y \le \left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (x,y) \text{ με } 1 \le x \le 2 ,\ 0 \le y \le \left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

και με τη βοήθεια πολικών συντεταγμένων

$$T = \left\{ (r,\theta) \text{ με } 1 \le r \le 2 ,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right\} = [1,2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ακολουθούν οι υπολογισμοί των ολοκληρωμάτων:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_{(1-x^2)^{1/2}}^{(4-x^2)^{1/2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x^2(4-x^2)^{1/2} + \frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} - x^2(1-x^2)^{1/2} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 (4-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int_0^1 x^2(4-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x - \frac{2}{3}\int_0^1 x^2(1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_1^2 \left(\int_0^{(4-x^2)^{1/2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \left(x^2(4-x^2)^{1/2} + \frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} \right) \mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int_1^2 (4-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int_1^2 x^2(4-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iint_T (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{4}{3}\int_0^2 (4-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int_0^2 x^2(4-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x - \frac{2}{3}\int_0^1 x^2(1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{16}{3}\int_0^1 (1-z^2)^{1/2}\,\mathrm{d}z + \frac{32}{3}\int_0^1 z^2(1-z^2)^{1/2}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x - \frac{2}{3}\int_0^1 x^2(1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x \\
&= 5\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x + 10\int_0^1 x^2(1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{15\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Τέλος, με τη βοήθεια πολικών συντεταγμένων, ο υπολογισμός γίνεται ταχύτατα

$$\iint_T \left(x^2+y^2\right)\ dxdy = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=1}^{r=2} r^3 dr d\theta = \frac{15\pi}{8}.$$

Παράδειγμα 6

Να υπολογισθεί ό όγκος του τρισδιάστατου χωρίου που περικλείεται από τους κυλίνδρους: $x^2+y^2=\alpha^2$ και $x^2+z^2=\alpha^2$.

Λύση :

Αν V δηλώνει το τρισδιάστατο χωρίο και R την προβολή του στο επίπεδο xy ο ζητούμενος όγκος ισούται με:

$$\iiint_V dxdydz = \iint_R \left(\int_{z=-\sqrt{\alpha^2-x^2}}^{z=\sqrt{\alpha^2-x^2}} dz \right) dxdy = 2\iint_R \sqrt{\alpha^2-x^2}\,dxdy$$

όπου R είναι ο δίσκος με σύνορο τον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=\alpha^2$.

Επομένως

$$\iint_R \sqrt{\alpha^2-x^2}\,dxdy = \int_{x=-a}^{x=a} \left(\int_{y=-\sqrt{\alpha^2-x^2}}^{y=\sqrt{\alpha^2-x^2}} \sqrt{\alpha^2-x^2}\,dy \right) dx = 2\int_{x=-\alpha}^{x=\alpha} \left(\alpha^2-x^2\right)dx =$$

$$2\left[\alpha^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-\alpha}^{x=\alpha} = 4\left(\alpha^3 - \frac{\alpha^3}{3}\right) = \frac{8\alpha^3}{3}$$

και ο ζητούμενος όγκος ισούται με $\dfrac{16\alpha^3}{3}$.

Παράδειγμα 7

Να υπολογίσετε τα παρακάτω διπλά ολοκληρώματα :

(α) $\int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x+y)\,dy\,dx$ (β) $\int_0^e \int_0^2 \frac{1}{xy}\,dy\,dx$

(γ) $\int_0^a \int_0^b xe^{xy}\,dy\,dx$ (δ) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2\,dy\,dx$

Λύση :

(α) Εχουμε ότι

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x+y)dy\,dx = \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \cos(x+y)dy \right) dx = \int_0^\pi \left[\sin(x+y)\right]_{y=0}^{y=\pi} dx =$$

$$= \int_0^\pi \left[\sin(\pi+x) - \sin x\right]dx = \left[-\cos(\pi+x)\right]_0^\pi + \left[\cos x\right]_0^\pi = -1-1-1-1 = -4$$

(β) Εχουμε ότι

$$\int_1^e \int_1^2 \frac{1}{xy} dy\,dx = \int_1^e \left(\int_1^2 \frac{1}{xy} dy \right) dx = \int_1^e \frac{1}{x} \left(\int_1^2 \frac{1}{y} dy \right) dx =$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x} \left[\ln|y|\right]_{y=1}^{y=2} dx = \int_1^e \frac{1}{x} (\ln 2 - \ln 1) dx = \ln 2 \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln 2 (1-0) = \ln 2$$

(γ) Εχουμε ότι

$$\int_0^a\int_0^b xe^{xy}dy\,dx = \int_0^a\left(\int_0^b xe^{xy}dy\right)dx = \int_0^a x\frac{1}{x}\left(\int_0^b e^{xy}d(xy)\right)dx =$$

$$= \int_0^a \left[e^{xy}\right]_{y=0}^{y=b} dx = \int_0^a \left(e^{bx} - e^0\right)dx = \int_0^a \left(e^{bx} - 1\right)dx = \frac{1}{b}\left[e^{bx}\right]_{x=0}^{x=a} - a =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ab} - \frac{1}{b} - a\,.$$

(δ) Εχουμε ότι

$$I = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy\,dx = \int_0^1\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

Θέτουμε $x = \sin u$, οπότε $\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} = \left(1-\sin^2 u\right)^{\frac{3}{2}} = \cos^3 u$ και $dx = \cos u\,du$.

Τότε

$$\int \left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx = \int \cos^3 u \cos u\,du = \int \cos^4 u\,du =$$

$$= \int \left(\frac{\cos 2u + 1}{2}\right)^2 du = \frac{1}{4}\int \left(\cos^2 2u + 2\cos 2u + 1\right)du =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\cos 4u + 1}{2} du + \frac{1}{2}\int \cos 2u\,du + \frac{1}{4}u =$$

$$= \frac{1}{32}\sin 4u + \frac{1}{4}\sin 2u + \frac{3}{8}u$$

Αφού $0 \le x = \sin u \le 1$, προκύπτει ότι $0 \le u \le \frac{\pi}{2}$, οπότε

$$I = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{32}\sin 4u + \frac{1}{4}\sin 2u + \frac{3}{8}u\right]_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}\,.$$

Παράδειγμα 8

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα :

(α) $I_1 = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sin\left(x^2+y^2\right)dxdy$,

(β) $I_2 = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xdy\,dx$.

Λύση :

(α) Θέτουμε : $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ dxdy = rdrd\theta.$ Τότε προκύπτει ότι :

$$I_1 = \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r\sin\left(r^2\right)d\theta dr = \frac{\pi}{2}\int_0^1 r\sin\left(r^2\right)dr = \frac{\pi}{4}\int_0^1 2r\sin\left(r^2\right)dr = \frac{\pi}{4}\left[-\cos\left(r^2\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}(1-\cos 1)$$

(β) Θέτουμε : $x = 1 + r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi,\ dxdy = rdrd\theta.$ Τότε προκύπτει ότι :

$$I_2 = \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{\pi} r(1 + r\cos\theta)d\theta dr = \int_0^1 r\left[x + r\sin\theta\right]_0^{\pi} dr = \int_0^1 \pi r dr = \left[\frac{\pi r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Παράδειγμα 9

(α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \int_{x-2}^{2-x} \sin\left(xy^3\right)dy\,dx$.

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_D \sin\left(y^3\right)dxdy$, όπου το χωρίο D περικλείεται από τις : $x = 0,\ y = \sqrt{x},\ y = 2$.

Λύση :

(α) Θέτοντας $u = -y$ προκύπτει ότι

$$I = \int_0^2 \int_{x-2}^{2-x} \sin\left(xy^3\right)dy\,dx = -\int_0^2 \int_{x-2}^{2-x} \sin\left(xu^3\right)dudx = -I$$

Επομένως $I = 0$.

(β) Εχουμε ότι

$$\iint_D \sin\left(y^3\right)dxdy = \int_{y=0}^2 \int_0^{y^2} \sin\left(y^3\right)dxdy =$$

$$= \int_0^2 \left[x\sin\left(y^3\right)\right]_0^{y^2} dy = \int_0^2 y^2\sin\left(y^3\right)dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 \sin\left(y^3\right)dy^3 = \frac{1}{3}\left[-\cos\left(y^3\right)\right]_0^2 = \frac{1}{3}(1-\cos 8)$$