Ιόνιο Πανεπιστήμιο - Τμήμα Πληροφορικής

Μαθηματικός Λογισμός

Ενότητα: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ-
ΠΟΛΛΑΠΛΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Παναγιώτης Βλάμος

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Ιόνιο Πανεπιστήμιο»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1. ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ

Α. Διπλή Ολοκλήρωση

Το διπλό ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης f σε χωρίο $D \subseteq IR^2$, συμβολίζεται με $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ και ορίζεται ως η κοινή τιμή του ορίου της κάτω προσέγγισης και της πάνω προσέγγισης που προκύπτει να αφήσουμε τη μία μεταβλητή να σαρώσει όλο το πεδίο ορισμού και κατόπιν αθροίσουμε κατά συνεχή τρόπο τις τιμές όλων των εικόνων της συνάρτησης.

Παρότι η σειρά ολοκλήρωσης δεν έχει σημασία σε ένα πολλαπλό ολοκλήρωμα, όταν το χωρίο ολοκλήρωσης R είναι απλά ένα Καρτεσιανό γινόμενο διαστημάτων, π.χ. $R = [\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$, δηλαδή:

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int_\gamma^\delta\int_\alpha^\beta f(x,y)dxdy = \int_\gamma^\delta\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)dx\right)dy = \int_\alpha^\beta\left(\int_\gamma^\delta f(x,y)dy\right)dx$$

ή όταν το χωρίο μπορεί να περιγραφεί εναλλακτικά
είτε ως: $\{(x,y): \alpha \le x \le \beta \ , \ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ (Τύπος Α)
είτε ως: $\{(x,y): \gamma \le y \le \delta \ , \ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$ (Τ'υπος Β)
η σειρά ολοκλήρωσης μπορεί να διευκολύνει σημαντικά τους υπολογισμούς.

Β. Πολλαπλή Ολοκλήρωση

Ο υπολογισμός των πολλαπλών ολοκληρωμάτων, απαιτεί κατάλληλη διαμέριση του χωρίου ολοκλήρωσης και τον υπολογισμό του ορίου του αθροίσματος που προκύπτει σύμφωνα με τον ορισμό. Η μέθοδος συνιστάται όταν δεν έχουμε τη δυνατότητα αναλυτικού υπολογισμού με τη βοήθεια των ακόλουθων τύπων, γνωστών και ως θεωρήματα Fubini :

Αν υπάρχουν τα ολοκληρώματα:

$$\int_{z_1=\phi(x,y)}^{z_2=\psi(x,y)} f(x,y,z)dz = g(x,y) \ , \ \int_{y_1=\lambda(x)}^{y_2=\mu(x)} g(x,y)dy = h(x) \ \text{και} \ \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx = I$$

τότε υπάρχει το ολοκλήρωμα $\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz$ και ισούται με I, όπου

$$R = \{(x,y,z): x_1 \le x \le x_2 \ , \lambda(x) \le y \le \mu(x) \ , \phi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$$

Επομένως το πρόβλημα του αναλυτικού υπολογισμού έγκειται στη δυνατότητα να εκφραστεί το χωρίο ολοκλήρωσης με τη βοήθεια ανισοτήτων της προηγούμενης μορφής.

Γ. Αλλαγή Μεταβλητών

Το χωρίο ολοκλήρωσης μπορεί να είναι ένωση χωρίων τύπου Α ή Β, των οποίων οι αμοιβαίες τομές περιέχουν μόνο συνοριακά σημεία, δηλαδή αν $S = \bigcup_{i=1}^{i=n} S_i$, όπου S_i χωρία τύπου Α ή Β, η f είναι συνεχής στο S και υπάρχουν τα ολοκληρώματα $\iint_{S_I} f(x,y)dxdy$, τότε $\iint_{S} f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{i=n} \iint_{S_I} f(x,y)dxdy$.

Επιπλέον η απεικόνιση του χωρίου ολοκλήρωσης με τη βοήθεια τυπικών μετασχηματισμών των καρτεσιανών συντεταγμένων σε πολικές, σφαιρικές ή κυλινδρικές, αλλά και άλλων μετασχηματισμών, διευκολύνει τους υπολογισμούς.

- **Εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες**

  Το εμβαδόν κλειστού και φραγμένου χωρίου R στο πολικό επίπεδο είναι $A = \int\int_R r\, dr\, d\theta$. Όπως είναι αναμενόμενο, αυτός ο τύπος του εμβαδού συμφωνεί με όλους τους προηγούμενους τύπους.

- **Μετατροπή καρτεσιανών ολοκληρωμάτων σε πολικά ολοκληρώματα**

  Η διαδικασία μετατροπής ενός καρτεσιανού ολοκληρώματος $\int\int_R f(x,y)dx\, dy$ σε πολικό ολοκλήρωμα περιλαμβάνει δυο βήματα.

  Βήμα 1^o: Αντικαθιστούμε με $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ και $dx\, dy = r\, dr\, d\theta$.

  Βήμα 2^o: Βρίσκουμε τα πολικά όρια της ολοκλήρωσης που ορίζουν τη συνολική καμπύλη του χωρίου ολοκλήρωσης R.

  Το καρτεσιανό ολοκλήρωμα παίρνει τότε τη μορφή

  $$\int\int_R f(x,y)dx\, dy = \int\int_G f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) r\, dr\, d\theta,$$

  όπου G είναι το χωρίο ολοκλήρωσης σε πολικές συντεταγμένες. Η διαδικασία αυτή μοιάζει με τη μέθοδο αντικατάστασης, μόνο που τώρα έχουμε δύο μεταβλητές προς αντικατάσταση αντί για μία. Σημειώστε ότι το γινόμενο $dx\, d\theta$ δεν αντικαθιστάται από το $dr\, d\theta$, αλλά από το $r\, dr\, d\theta$.

Δ. Εφαρμογές Πολλαπλής Ολοκλήρωσης

- **Ογκος στερεού σώματος**

  Αν ένα στερεό σώμα καταλαμβάνει το χωρίο $D \subseteq IR^3$, τότε ο στοιχειώδης όγκος είναι ίσος με dxdydz, ενώ ο ολικός όγκος του σώματος δίνεται από το ολοκλήρωμα :

  $$V = \iiint_D dxdydz$$

- **Ολική μάζα σώματος**

  Αν ένα σώμα έχει πυκνότητα μάζας $p = p(x,y,z)$, $(x,y,z) \in D \subseteq IR^3$, τότε η στοιχειώδης μάζα που βρίσκεται μέσα στο στοιχειώδη όγκο dxdydz είναι ίση με $dm = p(x,y,z)dxdydz$ και η ολική μάζα του σώματος δίνεται από το ολοκλήρωμα :

  $$M = \iiint_D dm = \iiint_D p(x,y,z)dxdydz$$