Ιόνιο Πανεπιστήμιο - Τμήμα Πληροφορικής

# Μαθηματικός Λογισμός

## Ενότητα: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ- ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Παναγιώτης Βλάμος

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Ιόνιο Πανεπιστήμιο»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

**Β. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ**

*Παράδειγμα 1*

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο σημείο (0,0).

β) Να αποδείξετε ότι οι μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν στο σημείο (0,0) και να βρείτε τις τιμές τους.

*Λύση :*

(α) Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\ell\mathrm{im}_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\ell\mathrm{im}_{x\to 0} f(x,0)=0\,.$$

Για $(x,y)\to(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας x=y , έχουμε ότι

$$\ell\mathrm{im}_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\ell\mathrm{im}_{t\to 0} f(t,t)=\ell\mathrm{im}_{t\to 0}\frac{t^4}{t^4+t^4}=\frac{1}{2}\,.$$

Συνεπώς το όριο $\ell\mathrm{im}_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει, επομένως η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο (0,0).

(β) Εχουμε ότι

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\ell\mathrm{im}_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0\,,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\ell\mathrm{im}_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0\,.$$

*Παράδειγμα 2*

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y}{x^3+y^3}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η $f$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο (0,0).

β) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ στο (0,0).

γ) Τι παρατηρείτε σε σχέση με τις μερικές παραγώγους της $f$ στο (0,0) και την παραγωγισιμότητά της στο σημείο αυτό ;

*Λύση :*

(α) Όταν $(x, y) \to (0,0)$ κατά μήκος της ευθείας y=mx (ακτινική προσέγγιση) τότε οι τιμές της δοσμένης συνάρτησης θα δίνονται για $(x, y) \neq (0,0)$ από τη σχέση : $f(x, mx) = \dfrac{2x^2mx}{x^3+(mx)^3} = \dfrac{2m}{1+m^3}$.

Επίσης όταν $(x, y) \to (0, 0)$ κατά μήκος της ευθείας y = mx θα έχουμε $(x, y) = (x, mx) \to (0, 0)$, δηλαδή $x \to 0$, οπότε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{2m}{1+m^3} = \frac{2m}{1+m^3}$$

που σημαίνει ότι η τιμή του ορίου εξαρτάται από τη διεύθυνση με την οποία πλησιάζουμε το (0, 0) και επομένως το όριο δεν υπάρχει. Επομένως η f δεν είναι συνεχής, άρα δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο (0,0).

(β) Εχουμε ότι $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$ και όμοια $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0$.

(γ) Παρατηρούμε ότι αν και ισχύει ότι $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$, ωστόσο η $f(x, y)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο (0,0).

*Παράδειγμα 3*

Εστω $z = f(x^2y)$, όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι :

α) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2y\dfrac{\partial z}{\partial y}$

β) $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

*Λύση :*

Εστω $u = x^2y$, οπότε $z = f(u)$. Τότε έχουμε ότι :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\cdot 2xy\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)\cdot x^2 .$$

α) Επομένως έχουμε ότι

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\cdot 2x^2y \text{ και } 2y\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\cdot 2x^2y,$$

δηλαδή $x\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

β) Επιπλέον έχουμε ότι

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=x^2 f''(u)\cdot 2xy=2x^3 y f''(u)$$

και από την άλλη

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2xy\, f''(u)\cdot 2xy=4x^2y^2\, f''(u)$$

Συνεπώς ισχύει ότι

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4x^3y^2\, f''(u)=2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

*Παράδειγμα 4*

Δίνεται η συνάρτηση :

$$u(x,y,z)=z\sin\left(\frac{y}{x}\right),\ \text{όπου}\ x=3r^2+2s,\ y=4r-2s^3,\ z=2r^2-3s^2.$$

Να υπολογισθούν οι μερικές παραγώγοι : α) $\frac{\partial u}{\partial r}$, β) $\frac{\partial u}{\partial s}$.

*Λύση :*

(α) Εχουμε ότι :

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}=\left[\left(z\cos\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]6r+\left[\left(z\cos\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\right]4+\left(\sin\frac{y}{x}\right)4r=$$

$$=-\frac{6ryz}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{4z}{x}\cos\frac{y}{x}+4r\sin\frac{y}{x}.$$

(β) Εχουμε ότι :

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}=\left[\left(z\cos\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]2+\left[\left(z\cos\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\right]\left(-6s^2\right)+\left(\sin\frac{y}{x}\right)(-6s)=$$

$$=-\frac{2yz}{x^2}\cos\frac{y}{x}-\frac{6s^2z}{x}\cos\frac{y}{x}-6s\sin\frac{y}{x}.$$

*Παράδειγμα 5*

Να εξετασθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση :

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Οι μερικές της παράγωγοι ορίζονται στο (0,0) ?

*Λύση :*

Η συνάρτηση: $f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

δεν είναι συνεχής στο (0,0) αφού το όριο της *f* κατά μήκος της $y=mx$ εξαρτάται από το m:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,mx)=\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)^2$$

Ωστόσο, οι μερικές παράγωγοι ορίζονται στο (0,0):

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^4/h^4-1}{h}=0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^4/h^4-1}{h}=0$$

*Παράδειγμα 6*

Από την Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδας έχουμε τον ακόλουθο πίνακα, που παρουσιάζει τις ετήσιες εισαγωγές και εξαγωγές της χώρας μας σε εκατοντάδες χιλιάδες συναλλαγές (στρογγυλοποιημένες) :

| ΕΤΟΣ | ΕΙΣΑΓΩΓΕΣ $x_i$ | ΕΞΑΓΩΓΕΣ $y_i$ |
|---|---|---|
| 1984 | 11 | 5 |
| 1985 | 14 | 6 |
| 1986 | 16 | 7 |
| 1987 | 19 | 9 |
| 1988 | 18 | 7 |
| 1989 | 26 | 12 |
| 1990 | 31 | 12 |
| 1991 | 39 | 15 |
| 1992 | 45 | 18 |
| 1993 | 51 | 19 |

Αν θεωρήσουμε τα ετήσια ζεύγη εισαγωγών-εξαγωγών ως σημεία $\Sigma_i(x_i,y_i)$, $i=1,2,\ldots,10$, να βρεθεί το «βέλτιστο σημείο» με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων, δηλαδή το σημείο Σ(x,y) για το οποίο το άθροισμα των αποστάσεων :

$$(\Sigma\Sigma_1)^2+(\Sigma\Sigma_2)^2+\ldots+(\Sigma\Sigma_{10})^2$$

γίνεται ελάχιστο.

*Λύση :*

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y)=\sum_{i=1}^{10}\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right]$ οπότε έχουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2\sum_{i=1}^{10}(x-x_i),\ \frac{\partial f}{\partial y}=2\sum_{i=1}^{10}(y-y_i),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=20,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=20,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0.$$

Οι εξισώσεις $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ δίνουν :

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i}{10}=\frac{270}{10}=27 \text{ και } y=\frac{\sum_{i=1}^{10}y_i}{10}=\frac{110}{10}=11,$$

επομένως το σημείο (27,11) είναι θέση πιθανού τοπικού ακροτάτου.

Αφού $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=400>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$ στο σημείο (27,11) παρουσιάζεται τοπικό ελάχιστο.

*Παράδειγμα 7*

Να υπολογίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης $f(x,y)=5x^2+6xy+2y^2-8$, υπό τη συνθήκη : $y^2=2px,\ p>0$.

*Λύση :*

Αρχικά επιλύουμε τον περιορισμό ως προς x :

$$y^2=2px \Leftrightarrow x=\frac{y^2}{2p}$$

Αντικαθιστούμε στη δοσμένη συνάρτηση $f(x,y)$, οπότε προκύπτει μία συνάρτηση μιας μεταβλητής, η

$$F(y)=f\left(\frac{y^2}{2p},y\right)=\frac{5y^4}{4p^2}+\frac{3y^3}{p}+2y^2-8$$

Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της $F(y)$ είναι:

$$F'(y)=\frac{5y^3}{p^2}+\frac{9y^2}{p}+4y=y\left(\frac{5y^2}{p^2}+\frac{9y}{p}+4\right)$$

$$F''(y)=\frac{15y^2}{p^2}+\frac{18y}{p}+4$$

Έχουμε ότι

$$F'(y)=0 \Leftrightarrow y=-p,\ y=-\frac{4p}{5},\ y=0$$

$$F''(-p)=1>0,\ F''\left(-\frac{4p}{5}\right)=-\frac{4}{5}<0,\ F''(0)=4>0$$

Συνεπώς η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $\left(\frac{8p}{25},-\frac{4p}{5}\right)$ και τοπικά ελάχιστα στα σημεία $\left(\frac{p}{2},-p\right)$ και $(0,0)$.

Για να βρούμε το ολικό ελάχιστο παρατηρούμε αρχικά ότι :

$$\lim_{y\to\pm\infty} F(y) = \lim_{y\to\pm\infty}\left(\frac{5y^4}{4p^2}\right) = +\infty.$$

Άρα η F έχει ολικό ελάχιστο το οποίο είναι η μικρότερη τιμή των δύο τοπικών ελαχίστων :

$$F(0) = -8 < F(-p) = \frac{p^2}{4} - 8.$$

Τελικά η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο (0,0).

*Παράδειγμα 8*

Οι εξισώσεις κυμάτων (για ηλεκτρομαγνητικά κύματα, ηχητικά κύματα κ.λ.π.) είναι όλες της μορφής:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) - a\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t) = 0 \quad ,$$

όπου a είναι μια σταθερά. Να αποδείξετε, αν $a\omega^2 = k^2$, ότι η συνάρτηση:

$$\Psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t) + B\sin(kx - \omega t)$$

ικανοποιεί (επαληθεύει) την παραπάνω εξίσωση ( όπου $\omega, k$ είναι σταθερές).

*Λύση :*

Έχουμε ότι: $\Psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t) + B\sin(kx - \omega t)$

Άρα : $\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t) = -kA\sin(kx - \omega t) + Bk\cos(kx - \omega t)$ και

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) = -k^2A\cos(kx - \omega t) - k^2B\sin(kx - \omega t) \qquad (\iota)$$

Ακόμα: $\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \omega A\sin(kx - \omega t) - \omega B\cos(kx - \omega t)$ και

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t) = -\omega^2A\cos(kx - \omega t) - \omega^2B\sin(kx - \omega t) \qquad (\iota\iota)$$

Από τις (ι) και (ιι), έχουμε:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) - a\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t) = -k^2A\cos(kx - \omega t) - k^2B\sin(kx - \omega t)$$

$$+ a\omega^2A\cos(kx - \omega t) + a\omega^2B\sin(kx - \omega t) =$$

$$= (a\omega^2 - k^2)A\cos(kx - \omega t) + (a\omega^2 - k^2)B\sin(kx - \omega t) = 0 \qquad (\text{αν } a\omega^2 = k^2)$$

*Παράδειγμα 9*

Να εξετασθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση :

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Οι μερικές της παράγωγοι ορίζονται στο (0,0) ?

*Λύση :*

Η συνάρτηση: $f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

δεν είναι συνεχής στο (0,0) αφού το όριο της *f* κατά μήκος της $y=mx$ εξαρτάται από το m:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,mx)=\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)^2$$

Ωστόσο, οι μερικές παράγωγοι ορίζονται στο (0,0):

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{{h^4}/{h^4}-1}{h}=0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{{h^4}/{h^4}-1}{h}=0$$

*Παράδειγμα 10*

α) Να υπολογίσετε τα όρια

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-16y^4}{x^2+4y^2}$ ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

β) Έστω $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$. Είναι δυνατόν να ορίσουμε το $f(0,0)$, έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο σημείο (0,0);

*Λύση :*

α) i)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-16y^4}{x^2+4y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2)^2-(4y^2)^2}{x^2+4y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2-4y^2)(x^2+4y^2)}{x^2+4y^2}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2-4y^2)=0$$

ii) Κάνοντας την αντικατάσταση $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ (πολικές συντεταγμένες) έχουμε $x^2 + y^2 = r^2$. Αν $(x,y) \to (0,0)$, τότε $r \to 0^+$ και το όριο που μας δίνεται γίνεται:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\ \ln(x^2 + y^2) = \lim_{r\to 0^+} r^2\ \ln(r^2) = \lim_{r\to 0^+} \frac{\ln(r^2)}{\frac{1}{r^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{r\to 0^+} \frac{\frac{2r}{r^2}}{-2\frac{1}{r^3}} == -\lim_{r\to 0^+} r^2 = 0$$

β) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$. Όταν $(x,y) \to (0,0)$ κατά μήκος της ευθείας y=0 (x-άξονας)

τότε οι τιμές της $f$ για $(x,y) \neq (0,0)$ είναι ίσες με: $f(x,0) = \dfrac{x^2}{x^2 + 0} = 1$ (I)

Επίσης όταν $(x, y) \to (0, 0)$ κατά μήκος της ευθείας $y = x$, τότε οι τιμές της $f$

για $(x,y) \neq (0,0)$ είναι ίσες με: $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{x^2}{x^2 + x^2} = \dfrac{1}{2}$ (II).

Από τις (I) και (II) βλέπουμε ότι, η τιμή του ορίου εξαρτάται από τη διεύθυνση με την οποία πλησιάζουμε το (0, 0) και επομένως το όριο δεν υπάρχει. Αφού δεν υπάρχει το όριο, η συνάρτηση δεν μπορεί να είναι συνεχής στο σημείο (0,0).