ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ: Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα (2)

ΙΟΝΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Βλάμος Παναγιώτης

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ

Ευρωπαϊκή Ένωση

ΕΣΠΑ 2007-2013

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Ιονίου Πανεπιστημίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Έμμεσες ή Επαναληπτικές Μέθοδοι

Μέθοδος της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης (SOR)

Αντί του γραμμικού συστήματος

$$A \cdot x = b$$

Θεωρούμε το $\omega A x = \omega b$

όπου το ω είναι μια πραγματική παράμετρος διαφορετική από το μηδέν.

Γνωρίζοντας ότι ισχύει A=D-L-U, ορίζουμε τους πίνακες A_0 και A_1 ως:

$$A_0 = D - \omega L \text{ και } A_1 = (1-\omega)D + \omega U$$

έτσι η μέθοδος γίνεται:

$$x^{(m+1)} = (D - \omega L)^{-1} \left[(1-\omega)D + \omega U\right] x^{(m)} + \omega (D - \omega L)^{-1} b$$

η παράμετρος “ω” καλείται παράγοντας υπερχαλάρωσης (για ω=1=>μέθοδος Gauss-Seidel).

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Έμμεσες ή Επαναληπτικές Μέθοδοι

Μέθοδος της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης (SOR)

Θεωρώ μ μια ιδιοτιμή του επαναληπτικού πίνακα B, της μεθόδου JACOBI, και λ μια ιδιοτιμή του πίνακα $T=T_{SOR}$. Τότε αν θεωρήσουμε ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός, πραγματικός και "έχει την ιδιότητα A" αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$\mu = \frac{\lambda+\omega-1}{\lambda^{1/2}\omega}$$

ή

$$\lambda - \mu\omega\lambda^{1/2} + (\omega - 1) = 0$$

Η εύρεση της βέλτιστης τιμής του ω ώστε η ρ(T) να γίνεται ελάχιστη με την βοήθεια αυτής της εξίσωσης είναι ένα ανοικτό πρόβλημα.

Αν περιορισθούμε σε πραγματικές τιμές των λ και ω η ω_{opt} είναι:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\mu^2}}$$

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Έμμεσες ή Επαναληπτικές Μέθοδοι

Μέθοδος της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης (SOR)

Για όμοιες ρίζες του πολυωνύμου. Ταυτόχρονα ισχύει: λ=|ω-1|.

Για τη σύγκλιση θα πρέπει |λ|<1 ή |ω-1|<1 ή 0<ω<2.

Για ω=1 : $\mu = \lambda^{1/2} \Rightarrow \lambda = \mu^2 \Rightarrow \rho(T_{Gauss-Seidel}) = \rho(T_{JACOBI})$

Από την οποία μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι η ταχύτητα σύγκλισης της Gauss-Seidel είναι (θεωρητικά) διπλάσια της JACOBI.

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Έμμεσες ή Επαναληπτικές Μέθοδοι

Μέθοδος της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης (SOR)

Παράδειγμα Έστω το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \ a \in \mathrm{R}$$

1) για ποιές τιμές του α οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel συγκλίνουν;

2) Για 0.5, να βρεθεί η τιμή του ω, που ελαχιστοποιεί την φασματική ακτίνα για την SOR μέθοδο.

Jacobi

$$T = D^{-1}(L+U) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

$$det(T - \lambda I) = 0 \Rightarrow det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\alpha$$

$$\eta \ \rho(T_{Jacobi}) = |a|$$

Οπότε θα πρέπει |α|<1.

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Έμμεσες ή Επαναληπτικές Μέθοδοι

Μέθοδος της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης (SOR)

Παράδειγμα

Gauss-Seidel

$$T = (D-L)^{-1} \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$det(T - \lambda I) = 0 \Rightarrow det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & a \\ 0 & a^2 - \lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow -\lambda \cdot (a^2 - \lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = a^2 \ \eta \ \rho(T_{G-S}) = a^2$$

Οπότε θα πρέπει |α|<1.

2) Ο πίνακας των συντελεστών είναι πραγματικός και συμμετρικός. Έχουμε ότι α=0.5 και ότι οι ιδιοτιμές της μεθόδου Jacobi είναι μ=±α. Ώστε, για μ=α=0.5, τότε ω_{opt}=2/(1+(1-α^2)^0.5)=1.0718 και $\rho(T_{SOR})$=0.0718.

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Έμμεσες ή Επαναληπτικές Μέθοδοι

Μέθοδος της Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης (SOR)

Παράδειγμα

Gauss-Seidel

$$T = (D-L)^{-1} \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$det(T - \lambda I) = 0 \Rightarrow det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & a \\ 0 & a^2 - \lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow -\lambda \cdot (a^2 - \lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = a^2 \ \eta \ \rho(T_{G-S}) = a^2$$

Οπότε θα πρέπει |α|<1.

2) Ο πίνακας των συντελεστών είναι πραγματικός και συμμετρικός. Έχουμε ότι α=0.5 και ότι οι ιδιοτιμές της μεθόδου Jacobi είναι μ=±α. Ώστε, για μ=α=0.5, τότε ω_{opt}=2/(1+(1-α^2)^0.5)=1.0718 και $\rho(T_{SOR})$=0.0718.

Τέλος Ενότητας