ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ: Άλγεβρα των Πινάκων (2)

ΙΟΝΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Βλάμος Παναγιώτης

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Ιονίου Πανεπιστημίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Αντιστρέψιμοι Πίνακες

Πίνακας 2 x 2

Θέτοντας $|A|=ad-bc$ και υποθέτοντας ότι $|A|\neq 0$ ισχύει ότι

$x_1=d/|A|$, $x_2=-b/|A|$, $x_3=-c/|A|$, $x_4=a/|A|$, οπότε

$$B=\begin{bmatrix} d/|A| & -b/|A| \\ -c/|A| & a/|A| \end{bmatrix}$$

(i) **ανταλλάσσουμε τα δύο στοιχεία της διαγωνίου**

(ii) **παίρνουμε τους αρνητικούς των άλλων σημείων**

(iii) **Διαιρούμε το κάθε στοιχείο με το $1/|A|$**

Άλγεβρα των Πινάκων

Αντιστρέψιμοι Πίνακες

Ένας τετραγωνικός πίνακας Α λέγεται *αντιστρέψιμος* εάν υπάρχει ένας πίνακας Β τέτοιος ώστε

$$AB=BA=I$$

Ο πίνακας Β είναι μοναδικός δλδ: έστω $AB_1=B_1A=I$ και $AB_2=B_2A=I$ τότε

$$B_2=B_2I=B_2(AB_1)=(B_2A)B_1=IB_1=B_1$$

Ο πίνακας Β καλείται *αντίστροφος του Α* και συμβολίζεται ως B^{-1}.

Παρατηρήστε την συμμετρία της σχέσης, δλδ ο Β είναι αντίστροφος του Α και ο Α είναι αντίστροφος του Β.

Άλγεβρα των Πινάκων

Αντιστρέψιμοι Πίνακες

Παράδειγμα: Για τους πίνακες A και B (βλ. Παρακάτω) νδο AB=BA=I

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Αν οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι τότε και ο AB είναι αντιστρέψιμος και $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$(AB)(B^{-1}A^{-1})= A[B(B^{-1}A^{-1})]=A[(BB^{-1})A^{-1}]=A[IA^{-1}]=AA^{-1}=I$

$(B^{-1}A^{-1})(AB)= [(B^{-1}A^{-1})A]B=[B^{-1}(A^{-1}A)]B=[B^{-1}I]B=B^{-1}B=I$

Γενικότερα αν οι $A_1, A_2, \ldots, A_\kappa$ πίνακες είναι αντιστρέψιμοι τότε και ο πίνακας γινόμενό τους είναι αντιστρέψιμος και $(A_1 A_2 \ldots A_\kappa)^{-1}=A_\kappa^{-1}\ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

Άλγεβρα των Πινάκων

Ειδικοί τύποι τετραγωνικών πινάκων

Ένας τετραγωνικός πίνακας D=[d_{ij}] είναι *διαγώνιος* όταν όλες οι μη διαγώνιες καταχωρίσεις του είναι μηδέν, δλδ:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ a \in K & i = j. \end{cases}$$

Επίσης, ο A=[a_{ij}] είναι *άνω τριγωνικός* όταν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω από την (κύρια) διαγώνιο είναι 0, δλδ

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i > j, \\ a \in K & i \leq j. \end{cases}$$

Άλγεβρα των Πινάκων

Ειδικοί τύποι τετραγωνικών πινάκων

Έστω $A=[a_{ij}]$ και $B=[b_{ij}]D=[d_{ij}]$ είναι n x n τριγωνικοί άνω πίνακες. Τότε:

1) A+B, kA, AB είναι επίσης τριγωνικοί με διαγωνίους $(a_{11}+b_{11}, \ldots, a_{nn}+b_{nn})$, $(ka_{11},\ldots,ka_{nn})$ και $(a_{11}b_{11},\ldots,a_{nn}b_{nn})$.

2) Για οποιοδήποτε πολυώνυμο f(x) ο f(A) είναι επίσης τριγωνικός με διαγώνιο $(f(a_{11}), f(a_{22}),\ldots,f(a_{nn}))$

3) ο A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν το κάθε διαγώνιο στοιχείο $a_{ii}\neq 0$, και όταν υπάρχει ο A^{-1} είναι επίσης τριγωνικός.

Ειδικοί τύποι τετραγωνικών πινάκων

Επίσης, ο A n x n είναι *κάτω τριγωνικός* όταν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την (κύρια) διαγώνιο είναι 0, δλδ

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i < j, \\ a \in K & i \geq j. \end{cases}$$

Άλγεβρα των Πινάκων

Ειδικοί τύποι πραγματικών τετραγωνικών πινάκων

α) *Συμμετρικοί πίνακες*: ένας πίνακας είναι συμμετρικός αν $A^T=A$.

Ισοδύναμα, ο $A=[a_{ij}]$ είναι συμμετρικός αν τα συμμετρικά (ως προς τη διαγωνίο) στοιχεία είναι ίσα:

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ji} & i \neq j, \\ a \in K & i = j. \end{cases}$$

ενώ είναι *αντισυμμετρικός όταν* $A^T=-A$

$$a_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & i \neq j, \\ 0 & i = j. \end{cases}$$

Άλγεβρα των Πινάκων

Ειδικοί τύποι πραγματικών τετραγωνικών πινάκων

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ -5 & -7 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ο A είναι συμμετρικός, ο B είναι αντισυμμετρικός και ο C δεν είναι τίποτε γιατί δεν είναι τετραγωνικός.

Άλγεβρα των Πινάκων

Ειδικοί τύποι πραγματικών τετραγωνικών πινάκων

β) *Ορθογώνιοι πίνακες*: ένας πίνακας είναι ορθογώνιος αν $A^T=A^{-1}$, δλδ $A^TA=AA^T=I$. Ως εκ τούτου ο A θα πρέπει να είναι τετραγωνικός και αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα:

$$A=\begin{bmatrix} 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ 4/9 & -4/9 & -7/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 \end{bmatrix},\ A^T=\begin{bmatrix} 1/9 & 4/9 & 8/9 \\ 8/9 & -4/9 & 1/9 \\ -4/9 & -7/9 & 4/9 \end{bmatrix},$$

$$A\cdot A^T=\begin{bmatrix} (1\cdot1+8\cdot8+(-4)\cdot(-4))/81 & (1\cdot4+8\cdot(-4)+(-4)\cdot(-7))/81 & (1\cdot8+8\cdot1+(-4)\cdot4)/81 \\ (4\cdot1+(-4)\cdot8+(-7)\cdot(-4))/81 & (4\cdot4+(-4)\cdot(-4)+(-7)\cdot(-7))/81 & (4\cdot8+(-4)\cdot1+(-7)\cdot4)/81 \\ (8\cdot1+1\cdot8+4\cdot(-4))/81 & (8\cdot4+1\cdot(-4)+4\cdot(-7))/81 & (8\cdot8+1\cdot1+4\cdot4)/81 \end{bmatrix}= I,$$

$$A^T\cdot A=\begin{bmatrix} (1\cdot1+4\cdot4+8\cdot8)/81 & (1\cdot8+4\cdot(-4)+8\cdot1)/81 & (1\cdot(-4)+4\cdot(-7)+8\cdot4)/81 \\ (8\cdot1+(-4)\cdot4+1\cdot8)/81 & (8\cdot8+(-4)\cdot(-4)+1\cdot1)/81 & (8\cdot(-4)+(-4)\cdot(-7)+1\cdot4)/81 \\ ((-4)\cdot1+(-7)\cdot4+4\cdot8)/81 & ((-4)\cdot8+(-7)\cdot(-4)+4\cdot1)/81 & ((-4)\cdot(-4)+(-7)\cdot(-7)+4\cdot4)/81 \end{bmatrix}= I$$

άρα $A^T=A^{-1}$, δλδ ο A είναι ορθογώνιος.

Άλγεβρα των Πινάκων

Ειδικοί τύποι πραγματικών τετραγωνικών πινάκων

Έστω ο A πραγματικός ορθογώνιος 3 x 3 πίνακας με γραμμές τις u(u1,u2,u3), v(v1,v2,v3), και w(w1,w2,w3). Εφόσον ο A είναι ορθογώνιος θα πρέπει $AA^T=I$, δλδ

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix},\ A^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix},\ A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$$

$$= \begin{bmatrix} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 & u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 & u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2 + u_3 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + v_3 \cdot u_3 & v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 & v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 \\ w_1 \cdot u_1 + w_2 \cdot u_2 + w_3 \cdot u_3 & w_1 \cdot v_1 + w_2 \cdot v_2 + w_3 \cdot v_3 & w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{lll} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 & u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 0 & u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2 + u_3 \cdot w_3 = 0 \\ v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + v_3 \cdot u_3 = 0 & v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1 & v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 = 0 \\ w_1 \cdot u_1 + w_2 \cdot u_2 + w_3 \cdot u_3 = 0 & w_1 \cdot v_1 + w_2 \cdot v_2 + w_3 \cdot v_3 = 0 & w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1 \end{array}$$

και u, v, w μοναδιαία διανύσματα και ανα δύο κάθετα (ορθογώνια) μεταξύ τους.

Άλγεβρα των Πινάκων

Ειδικοί τύποι πραγματικών τετραγωνικών πινάκων

Στον χώρο R^n τα διανύσματα u, v, ..., w σχηματίζουν ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων, αν είναι μοναδιαία διανύσματα τα οποία είναι ορθογώνια μεταξύ τους, δλδ:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

με άλλα λόγια $\vec{u} \cdot \vec{v} = \delta_{ij}$

Δείξαμε ότι η συνθήκη $AA^T=I$ συνεπάγεται ότι οι γραμμές του A σχηματίζουν ορθοκανονικό σύστημα. Από την $A^TA=I$ συνεπάγεται ότι οι στήλες του A σχηματίζουν ορθοκανονικό σύστημα.

Άλγεβρα των Πινάκων

Ειδικοί τύποι πραγματικών τετραγωνικών πινάκων

γ) *Κανονικοί πίνακες*: ένας πίνακας είναι κανονικός αν αντιμετατίθεται με τον ανάστροφό του, δλδ $A^T A = A A^T$. Γενικά αν ο A είναι συμμετρικός, ορθογώνιος, ή αντισυμμετρικός, τότε είναι και κανονικός.

Άλγεβρα των Πινάκων

Μιγαδικοί Πίνακες

Έστω Α ένας μιγαδικός πίνακας , ένας πίνακας με μιγαδικές καταχωρήσεις. Υπενθυμίζεται ότι

$$z = a + bi,\ \bar{z} = a - bi$$

Ο συζυγής ενός μιγαδικού πίνακα Α, γράφεται $\bar{A}$ και προκύπτει αν για κάθε μιγαδική καταχώριση του Α πάρουμε τη συζηγή της.

Οι πράξεις της αναστροφής και της συζηγίας αντιμετατίθενται για οποιοδήποτε μιγαδικό πίνακα Α, και για το συζηγή ανάστροφο του Α χρησιμοποιείται ο ειδικός συμβολισμός A^H. Δλδ:

$$A^H = (\bar{A})^T = (\overline{A^T})$$

Άλγεβρα των Πινάκων

Ειδικοί τύποι μιγαδικών πινάκων

Έστω Α ένας μιγαδικός πίνακας . Η σχέση μεταξύ του Α (για Α τετραγωνικό πίνακα) και του A^H οδηγεί σε μερικά σημαντικά είδη πινάκων.

α) *Ερμιτιανός ή αντι-Ερμιτιανός*: $A^H=A$ ή $A^H=-A$

Ο $A=[a_{ij}]$ είναι Ερμιτιανός αν και μόνο αν τα συμμετρικά στοιχεία είναι συζηγή, δλδ $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ ενώ τα στοιχεία της διαγωνίου θα πρέπει να είναι πραγματικά. Όμοια, αν ο Α είναι αντισυμμετρικός, τότε τα στοιχεία της διαγωνίου θα είναι μηδέν.

Ειδικοί τύποι μιγαδικών πινάκων

β) *Μοναδιαίος*: αν ισχύει $A^H A = A^H A = I$, δλδ $A^H = A^{-1}$

συνεπώς ο A θα πρέπει να είναι οπωσδήποτε τετραγωνικός και αντιστρέψιμος. Σημειώνεται ότι ένας μιγαδικός πίνακας A είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν οι γραμμές του σχηματίζουν ένα ορθοκανονικό σύνολο ως προς το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. $\bar{A}$

γ) *Κανονικός*: αν ισχύει $A^H A = A^H A$

Άλγεβρα των Πινάκων

Ειδικοί τύποι μιγαδικών πινάκων

Παραδείγματα:

α)

$$A = \begin{bmatrix} 2+8i & 5-3i & 4-7i \\ 6i & 1-4i & 3+2i \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2+8i & 6i \\ 5-3i & 1-4i \\ 4-7i & 3+2i \end{bmatrix},$$

$$A^H = \overline{A^T} = \begin{bmatrix} 2-8i & -6i \\ 5+3i & 1+4i \\ 4+7i & 3-2i \end{bmatrix}.$$

β) $$A = \begin{bmatrix} 3 & 5-3i & 1-6i \\ 5+3i & 5 & 2-4i \\ 1+6i & 2+4i & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{bmatrix}$$

i) βρείτε τον A^H, ii) βρείτε τον B^H και καντε την πράξη BB^H, κάντε την πράξη CC^H

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης