ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Ιανουάριος 2021

Περιεχόμενα

1 Σύνολα και αλγεβρικές δομές **1**
1.1 Σύνολα . . . 1
1.1.1 Γενικά . . . 1
1.1.2 Σχέσεις . . . 2
1.1.3 Συναρτήσεις . . . 3
1.2 Αλγεβρικές δομές . . . 3
1.2.1 Πράξεις σε σύνολα . . . 3
1.2.2 Ομάδες . . . 4
1.2.3 Δακτύλιοι . . . 4
1.2.4 Σώματα . . . 5

2 Γραμμικά συστήματα: Γενικά **7**
2.1 Γραμμικά συστήματα . . . 7
2.2 Γεωμετρική ερμηνεία . . . 8
2.2.1 Ευθείες – επίπεδα – υπερεπίπεδα . . . 8
2.2.2 Διανύσματα . . . 9
2.3 Ομογενή συστήματα . . . 10

3 Πίνακες **13**
3.1 Τι είναι οι πίνακες . . . 13
3.1.1 Ειδικές περιπτώσεις . . . 14
3.2 Πράξεις πινάκων . . . 15
3.2.1 Πρόσθεση . . . 15
3.2.2 Πολλαπλασιασμός με αριθμό . . . 16
3.2.3 Πολλαπλασιασμός . . . 16
3.2.4 Αντίστροφος πίνακας . . . 19
3.2.5 Δυνάμεις πίνακα . . . 20
3.2.6 Διαγώνιοι πίνακες . . . 21
3.3 Πίνακες και γραμμικά συστήματα . . . 21

4 Γραμμικά συστήματα: Επίλυση **23**
4.1 Η μέθοδος Gauss 23
4.1.1 Μοναδική λύση 24
4.1.2 Άπειρες λύσεις 26
4.1.3 Καμία λύση 28
4.1.4 Συστήματα με $m \neq n$ 29
4.2 Η μέθοδος Gauss – Jordan 30
4.3 Γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες 31
4.4 Τάξη πίνακα 32

5 Ορίζουσες **33**
5.1 Ορίζουσα πίνακα 33
5.2 Ανάπτυγμα ορίζουσας 34
5.3 Γεωμετρική ερμηνεία της ορίζουσας 35
5.4 Ιδιότητες και υπολογισμός οριζουσών 36
5.5 Επίλυση συστήματος με ορίζουσες 39

6 Υπολογισμοί αντίστροφου πίνακα **43**
6.1 Υπολογισμός με τη μέθοδο Gauss – Jordan 43
6.2 Υπολογισμός με τον προσαρτημένο πίνακα 45
6.3 Επίλυση συστήματος $n \times n$ με τον αντίστροφο πίνακα 46
6.4 Ισοδύναμες προτάσεις για έναν πίνακα $n \times n$ 47

7 Διανυσματικοί χώροι **49**
7.1 Τι είναι ένας διανυσματικός χώρος 49
7.2 Υπόχωροι 51
7.3 Γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων 53
7.4 Βάση και διάσταση 57
7.5 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο 61
7.6 Χώροι σχετιζόμενοι με πίνακα 64

8 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα **69**
8.1 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πίνακα 69
8.2 Όμοιοι πίνακες 73
8.3 Διαγωνιοποίηση πίνακα 74
8.4 Ιδιοτιμές και διαγωνιοποίηση 79
8.5 Υπολογισμός δυνάμεων πινάκων 83

Κεφάλαιο 1

Σύνολα και αλγεβρικές δομές

1.1 Σύνολα

1.1.1 Γενικά

Το **σύνολο**, που το αντιλαμβανόμαστε ως μία συλλογή διακεκριμένων **στοιχείων** (ενδεχομένως άπειρων στο πλήθος), είναι μια θεμελιώδης έννοια των μαθηματικών που δεν ορίζεται (δηλαδή δεν ανάγεται σε απλούστερες έννοιες), όπως δεν ορίζεται η έννοια του σημείου στη γεωμετρία.

Αν το x είναι ένα στοιχείο του συνόλου A συμβολίζουμε $x \in A$. Δύο σύνολα A και B λέγονται **ίσα** αν και μόνο αν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Αν κάθε στοιχείο του συνόλου A ανήκει και στο σύνολο B λέμε ότι το A είναι **υποσύνολο** του B ($A \subseteq B$). Αν είναι $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A = B$.

Το **κενό σύνολο** $\emptyset$ είναι το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο και θεωρείται υποσύνολο οποιουδήποτε άλλου συνόλου. Το **δυναμοσύνολο** $\mathcal{P}(A)$ ενός συνόλου A είναι το σύνολο των υποσυνόλων του. Αν το A έχει N στοιχεία ($|A| = N$) θα είναι $|\mathcal{P}(A)| = 2^N$.

Στα σύνολα ορίζονται οι πράξεις **ένωση** ($\cup$) και **τομή** ($\cap$). Για δύο σύνολα A, B είναι

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

και

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \textit{και} \ x \in B\} \ .$$

Αντίστοιχα ορίζονται η ένωση και η τομή για περισσότερα από δύο σύνολα.

Η **διαφορά** $A - B$ δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B. Αν $B \subseteq A$ η διαφορά τους λέγεται **συμπλήρωμα** του B στο A και συμβολίζεται B^c.

Καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών με το πρώτο στοιχείο από το A και το δεύτερο από το

B:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \;\textit{και}\; b \in B\} \ .$$

Το καρτεσιανό γινόμενο n συνόλων είναι αντίστοιχα το σύνολο των διατεταγμένων n–άδων.

1.1.2 Σχέσεις

Ένα υποσύνολο R του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$ ονομάζεται **διμελής σχέση** από το A στο B. Μπορούμε να έχουμε μία διμελή σχέση στο ίδιο το σύνολο A, όταν $R \subseteq A \times A$. Αν $(x,y) \in R$ συμβολίζουμε xRy.

Μία διμελής σχέση στο σύνολο A ονομάζεται **σχέση ισοδυναμίας** όταν είναι

- **αυτοπαθής**, δηλαδή $xRx \quad \forall\, x \in A$,
- **συμμετρική**, δηλαδή $xRy \;\Rightarrow\; yRx \quad \forall\, x, y \in A$ και
- **μεταβατική**, δηλαδή $xRy \;\textit{και}\; yRz \;\Rightarrow\; xRz \quad \forall\, x, y, z \in A$.

Για παράδειγμα, η ισότητα σε ένα σύνολο είναι σχέση ισοδυναμίας ενώ η σχέση $A \subseteq B$ δεν είναι επειδή δεν είναι συμμετρική. Σε μια σχέση ισοδυναμίας αντί xRy συμβολίζουμε $x \sim y$.

Η **κλάση ισοδυναμίας** K_a ενός στοιχείου a του συνόλου A είναι το σύνολο των στοιχείων του A που είναι ισοδύναμα με το a για μια δεδομένη σχέση ισοδυναμίας $\sim$:

$$K_a = \{x \in A \mid x \sim a\} \ .$$

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του A συμβολίζεται με $A/\sim$. Ισχύουν τα εξής:

1. $\forall\, a, b \in A$ είναι $K_a = K_b$ αν και μόνο αν $a \sim b$.
2. $\forall\, a, b \in A$ είναι $K_a = K_b$ ή $K_a \cap K_b = \emptyset$.
3. $\bigcup_{a \in A} K_a = A$.

Λέμε ότι η σχέση ισοδυναμίας $\sim$ δημιουργεί μία **διαμέριση** του συνόλου A. Γενικά, διαμέριση ενός συνόλου A ονομάζεται ένα σύνολο από μη κενά υποσύνολα X_i του A που είναι ξένα μεταξύ τους ($X_i \cap X_j = \emptyset$ για $i \neq j$) και η ένωσή τους μας δίνει το A ($U_i X_i = A$).

1.1.3 Συναρτήσεις

Μία διμελής σχέση ανάμεσα σε δύο σύνολα A και B λέγεται **απεικόνιση** ή **συνάρτηση** f από το A στο B αν *κάθε* στοιχείο x του A σχετίζεται με ένα *ακριβώς* στοιχείο y του B. Συμβολίζουμε

$$f : A \to B \ , \quad x \to y \ , \quad y = f(x) \ .$$

Δύο συναρτήσεις $f : A \to B$ και $g : C \to D$ είναι ίσες αν $A = C$, $B = D$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

Μία συνάρτηση $f : A \to B$ ονομάζεται $\mathbf{1-1}$ αν σε διαφορετικά στοιχεία του A αντιστοιχίζει διαφορετικά στοιχεία του B:

$$f(x) = f(x') \ \Rightarrow \ x = x' \ .$$

Μία συνάρτηση $f : A \to B$ ονομάζεται **επί** αν σε κάθε στοιχείο του B αντιστοιχίζεται κάποιο στοιχείο του A:

$$\forall\, y \in B \quad \exists\, x \in A \quad \mu\varepsilon \ y = f(x) \ .$$

Αν έχουμε δύο συναρτήσεις $f : A \to B$ και $g : B \to C$, **σύνθεση** των δύο λέγεται η συνάρτηση $g \circ f : A \to C$ με

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \ .$$

Η σύνθεση δύο συναρτήσεων *δεν είναι γενικά αντιμεταθετική* είναι όμως *προσεταιριστική*. Αν έχουμε τρεις συναρτήσεις $f : A \to B$, $g : B \to C$ και $h : C \to D$ θα είναι $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (από το A στο D).

Αν μία συνάρτηση $f : A \to B$ *είναι 1 − 1 και επί* ορίζεται η **αντίστροφη** συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$ με

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x \ .$$

Αν οι δύο συναρτήσεις $f : A \to B$ και $g : B \to C$ είναι $1 - 1$ και επί τότε και η $g \circ f : A \to C$ είναι $1 - 1$ και επί και επομένως ορίζεται η $(g \circ f)^{-1}$ για την οποία ισχύει

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \ .$$

1.2 Αλγεβρικές δομές

1.2.1 Πράξεις σε σύνολα

Πράξη σε ένα μη κενό σύνολο A ονομάζεται μία απεικόνιση ϕ από το $A \times A$ στο A. Σε δύο οποιαδήποτε στοιχεία a, b του A αντιστοιχίζουμε δηλαδή ένα άλλο στοιχείο c του A. Αντί για $c = \phi(a, b)$ συμβολίζουμε συνήθως

$$c = a * b \ ,$$

όπου $*$ το σύμβολο της πράξης (ή και $c = ab$ αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχισης).

Όταν λύνουμε τις συνηθισμένες απλές εξισώσεις με ακέραιους ή πραγματικούς αριθμούς χρησιμοποιούμε πάντα (κι ας μην το δηλώνουμε) κάποιες ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού όπως την **προσεταιριστικότητα** και την **μεταθετικότητα**. Ακόμα και οι συμβολισμοί μας μπορεί να προϋποθέτουν κάποια ιδιότητα μιας πράξης: Μπορούμε και γράφουμε $x + y + z$ ακριβώς επειδή $(x + y) + z = x + (y + z)$, δηλαδή επειδή η πρόσθεση είναι προσεταιριστική.

1.2.2 Ομάδες

Ένα σύνολο G με μία πράξη $*$ λέμε ότι αποτελούν την **ομάδα** $(G, *)$ όταν:

- Η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική, δηλαδή
$$a * (b * c) = (a * b) * c \qquad \forall\, a, b, c \in G\ .$$
- Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $e \in G$, δηλαδή ένα στοιχείο του G τέτοιο ώστε
$$a * e = e * a = a \qquad \forall\, a \in G\ .$$
- Κάθε στοιχείο $a \in G$ έχει αντίστροφο $a' \in G$ για το οποίο ισχύει
$$a * a' = a' * a = e\ .$$

Αν επιπλέον ισχύει και η μεταθετική ιδιότητα λέμε ότι η ομάδα είναι **μεταθετική** ή **αβελιανή**.

Παραδείγματα ομάδων: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

1.2.3 Δακτύλιοι

Ένα σύνολο R με δύο πράξεις $+$ και $\cdot$ αποτελούν τον **δακτύλιο** $(R, +, \cdot)$ όταν:

- Το $(R, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.
- Η πράξη $\cdot$ είναι προσεταιριστική:
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \qquad \forall\, a, b, c \in R\ .$$
- Ισχύουν ο αριστερός και ο δεξιός επιμεριστικός νόμος:
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)\ , \qquad (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)\ ,$$
$\forall\, a, b, c \in R$.

Αν η πράξη $\cdot$ είναι μεταθετική ο δακτύλιος λέγεται **μεταθετικός**. Αν ο δακτύλιος διαθέτει ουδέτερο στοιχείο και ως προς την πράξη $\cdot$ λέγεται **δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο**.

Παραδείγματα δακτυλίων: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

1.2.4 Σώματα

Ένα σύνολο F με δύο πράξεις $+$ και $\cdot$ αποτελούν το **σώμα** $(F, +, \cdot)$ όταν:

- Το $(F, +, \cdot)$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.
- Αν $F^* = F - \{0\}$, όπου 0 το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $+$, το $(F^*, \cdot)$ είναι ομάδα.

Παραδείγματα σωμάτων: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Κεφάλαιο 2

Γραμμικά συστήματα: Γενικά

2.1 Γραμμικά συστήματα

Η γραμμική άλγεβρα ξεκινάει από το πρόβλημα της επίλυσης **γραμμικών συστημάτων**. Ένα τέτοιο σύστημα στη γενική περίπτωση αποτελείται από m εξισώσεις με n αγνώστους (λέμε ότι είναι $m \times n$) οι οποίες πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα.

Παράδειγμα 2-1

Ένα γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους έχει τη μορφή:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 x & + & \beta_1 y & + & \gamma_1 z & = & \delta_1 \\ \alpha_2 x & + & \beta_2 y & + & \gamma_2 z & = & \delta_2 \\ \alpha_3 x & + & \beta_3 y & + & \gamma_3 z & = & \delta_3 \end{array} \tag{2.1}$$

Το επόμενο γραμμικό σύστημα έχει 3 εξισώσεις με 4 αγνώστους:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 20 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 30 \end{array} \tag{2.2}$$

■

Για να είναι ένα σύστημα γραμμικό *πρέπει ο κάθε άγνωστος*:

- να μην είναι υψωμένος σε δύναμη,
- να μην είναι όρισμα συναρτήσεων όπως οι τριγωνομετρικές, εκθετικές κλπ,

- να μην πολλαπλασιάζεται με άλλον άγνωστο.

Παράδειγμα 2-2

Το ακόλουθο σύστημα δεν είναι γραμμικό, επειδή γραμμική είναι μόνο η δεύτερη εξίσωσή του:

$$\begin{aligned} xy + z &= 10 \\ x + y + z &= 7 \\ \ln(x - 2z) &= 0 \end{aligned}$$

■

Λύση ενός γραμμικού συστήματος $m \times n$ είναι κάθε n-άδα αριθμών που ικανοποιούν και τις m εξισώσεις του. Για κάθε γραμμικό σύστημα *τρία μόνο ενδεχόμενα* υπάρχουν:

- να έχει μία *μοναδική λύση*,
- να έχει *άπειρες λύσεις*
- ή να μην έχει *καμία λύση* (αδύνατο σύστημα).

Αν το σύστημα είναι 2×2, δηλαδή

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \ , \end{aligned} \tag{2.3}$$

είναι εύκολο να το δει κανείς αυτό παίρνοντας τη γεωμετρική ερμηνεία των εξισώσεων. Έχουμε δύο ευθείες στο επίπεδο. Αυτές μπορεί να

- τέμνονται σε ένα σημείο (x, y), οι συντεταγμένες του οποίου δίνουν τη μοναδική λύση του συστήματος
- ή να ταυτίζονται, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις
- ή να είναι παράλληλες, οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

2.2 Γεωμετρική ερμηνεία

2.2.1 Ευθείες – επίπεδα – υπερεπίπεδα

Όπως ένα γραμμικό σύστημα 2×2 αντιστοιχεί σε ένα σύστημα 2 ευθειών στο επίπεδο (χώρος 2 διαστάσεων), έτσι και ένα 3×3, σαν το (2.1), αντιστοιχεί σε ένα σύστημα 3 επιπέδων στον τρισδιάστατο χώρο. Τότε:

- Υπάρχει μοναδική λύση (x, y, z) όταν τα τρία επίπεδα τέμνονται σε ένα σημείο με αυτές τις συντεταγμένες. (Τα δύο επίπεδα τέμνονται σε μία ευθεία που τέμνει το τρίτο σε ένα σημείο.)
- Υπάρχουν άπειρες λύσεις όταν
  - τα τρία επίπεδα ταυτίζονται,
  - τα δύο επίπεδα ταυτίζονται και το τρίτο τέμνεται με αυτά σε μια ευθεία
  - ή τα τρία επίπεδα τέμνονται στην ίδια ευθεία.
- Δεν υπάρχει καμία λύση όταν
  - τα τρία επίπεδα είναι παράλληλα,
  - τα δύο επίπεδα ταυτίζονται και το τρίτο είναι παράλληλο με αυτά,
  - τα δύο επίπεδα είναι παράλληλα και το τρίτο τα τέμνει σε δύο παράλληλες ευθείες,
  - τα τρία επίπεδα τέμνονται ανά δύο σε τρεις παράλληλες μη συνεπίπεδες ευθείες (τριγωνική διάταξη επιπέδων).

Αν έχουμε σύστημα με εξισώσεις 4 αγνώστων η κάθε εξίσωση θα αντιστοιχεί σε ένα υπερεπίπεδο 3 διαστάσεων μέσα σε ένα χώρο 4 διαστάσεων. Η κατάσταση τώρα γίνεται πολύ περίπλοκη και χειροτερεύει διαρκώς όσο πηγαίνουμε σε περισσότερες διαστάσεις. Με την εναλλακτική γεωμετρική ερμηνεία που ακολουθεί τα πράγματα είναι πιο εύκολα.

2.2.2 Διανύσματα

Κάθε γραμμικό σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως μία διανυσματική εξίσωση. Έτσι, για παράδειγμα, το 2.3 είναι η διανυσματική εξίσωση

$$x \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} . \tag{2.4}$$

Εδώ τα διανύσματα (a_1, a_2), (b_1, b_2) και (c_1, c_2) συμβολίζονται ως *πίνακες - στήλες* (κεφάλαιο 3). Τώρα:

- Αν τα διανύσματα (a_1, a_2) και (b_1, b_2) δεν είναι συγγραμικά (δεν είναι δηλαδή το ένα πολλαπλάσιο του άλλου) τότε ορίζουν 2 άξονες και οποιοδήποτε διάνυσμα (c_1, c_2) μπορεί να αναλυθεί στους άξονες αυτούς. Μπορεί δηλαδή να βρεθούν συγκεκριμένες τιμές των x και y ώστε να ισχύει η 2.4. Θα λέμε (κεφάλαιο 7) ότι το (c_1, c_2) μπορεί να γραφτεί ως *γραμμικός συνδυασμός* των άλλων διανυσμάτων. Είναι η περίπτωση της μοναδικής λύσης.

- Αν τα διανύσματα (a_1, a_2) και (b_1, b_2) είναι συγγραμικά δεν μπορούν να ορίσουν 2 άξονες και τότε
  - αν το (c_1, c_2) είναι κι αυτό συγγραμικό με αυτά μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός τους και μάλιστα με άπειρους τρόπους (άπειρες λύσεις), ενώ
  - αν δεν είναι συγγραμικό με αυτά δεν μπορεί με κανένα τρόπο να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός τους (καμία λύση).

Όσους αγνώστους και όσες εξισώσεις και αν έχουμε (δηλαδή γενικά για ένα σύστημα $m \times n$) το κριτήριο παραμένει το ίδιο:

Πρέπει το διάνυσμα των σταθερών όρων (αυτών στα δεξιά μέλη των εξισώσεων) να μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων των συντελεστών των αγνώστων (που είναι όσα και οι άγνωστοι, δηλαδή n). Η διαφορά με το παράδειγμα του συστήματος 2×2 θα είναι ότι όλα τα διανύσματα θα έχουν m συνιστώσες.

Παράδειγμα 2-3

Το σύστημα (2.2) δεν είναι αδύνατο, αν το διάνυσμα $(20, 12, 30)$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των

$$(2, 1, 3)\,, \quad (1, -1, 2)\,, \quad (3, 1, 1)\,, \quad (-4, 1, 2)\ .$$

■

2.3 Ομογενή συστήματα

Όταν οι σταθερές στα δεξιά μέλη ενός γραμμικού συστήματος είναι σε όλες τις εξισώσεις ίσες με το 0 έχουμε ένα **ομογενές σύστημα**. Ένα 2×2, για παράδειγμα, τέτοιο σύστημα θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= 0 \\ a_2 x + b_2 y &= 0\ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ένα ομογενές σύστημα αποκλείεται να είναι αδύνατο, αφού έχει πάντα τη λύση στην οποία όλοι οι άγνωστοι είναι ίσοι με το 0 (**τετριμμένη λύση**). Επομένως

- ή θα έχει μόνο την τετριμμένη λύση
- ή θα έχει άπειρες λύσεις.

Κεφάλαιο 3

Πίνακες

3.1 Τι είναι οι πίνακες

Ένας **πίνακας** είναι ουσιαστικά μία ορθογώνια διάταξη αριθμών σε *γραμμές* και *στήλες*. Αν έχει m γραμμές και n στήλες λέμε ότι είναι πίνακας (*διαστάσεων*) $m \times n$ (και έχει $m \cdot n$ *στοιχεία*). Στα επόμενα παραδείγματα ο A είναι πίνακας 3×4, ο B είναι 2×2 και ο C 3×2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -9 & 2 \\ -5 & 12 & 8 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -13 & 25 \\ 40 & -8 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ -6 & 9 \\ 5 & 17 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιούμε, γενικά, κεφαλαία γράμματα για τον συμβολισμό πινάκων.

Το στοιχείο ενός πίνακα A που βρίσκεται στη γραμμή i και τη στήλη j συμβολίζεται a_{ij} ή $(A)_{ij}$. Έτσι, για τους προηγούμενους πίνακες θα είναι

$$a_{23} = -9 \ , \qquad a_{32} = 12 \ , \qquad b_{22} = -8 \ , \qquad c_{31} = 5 \ .$$

Συμβολίζουμε επίσης ολόκληρο έναν πίνακα A και ως $[a_{ij}]$.

Ένας πίνακας που έχει μόνο μία γραμμή, όπως ο

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 15 & -4 \end{bmatrix} \ ,$$

ονομάζεται **πίνακας - γραμμή**, ενώ ένας πίνακας που έχει μόνο μία στήλη, όπως ο

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} \ ,$$

ονομάζεται **πίνακας - στήλη**. Με τέτοιους πίνακες μπορούμε να παριστάνουμε διανύσματα. Τους συμβολίζουμε με μικρά γράμματα υπογραμμισμένα (αντί για βέλος πάνω τους), όπως $\underline{x}$, $\underline{r}$, $\underline{y}$, $\underline{c}$, $\underline{b}$.

Δύο πίνακες είναι *ίσοι* όταν έχουν τις ίδιες διαστάσεις και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.

Ο **ανάστροφος** πίνακας του $A = [a_{ij}]$ προκύπτει όταν μετατρέψουμε τις γραμμές του A σε στήλες (και συνεπώς και τις στήλες του σε γραμμές):

$$A^T = [a_{ji}] \tag{3.1}$$

Για τον A, που αναφέρθηκε στην αρχή ως πρώτο παράδειγμα πίνακα, θα είναι:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -6 & 4 & 12 \\ 3 & -9 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Αν ο A είναι $m \times n$ ο A^T θα είναι $n \times m$.

3.1.1 Ειδικές περιπτώσεις

- Ένας πίνακας όπως ο

  $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & -9 & 2 \\ -5 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

  λέγεται **τετραγωνικός:** έχει ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών.

  Το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων ενός τετραγωνικού ($n \times n$) πίνακα A λέγεται **ίχνος** του πίνακα και συμβολίζεται $tr(A)$:

  $$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{3.2}$$

  Στο παράδειγμά μας είναι $tr(A) = 1 - 9 - 1 = -9$.

- Ένας τετραγωνικός πίνακας όπως ο

  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  λέγεται **διαγώνιος:** όλα τα μη διαγώνια στοιχεία του, τα a_{ij} με $i \neq j$, είναι μηδενικά.

- Ένας τετραγωνικός πίνακας όπως ο
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
λέγεται **κάτω τριγωνικός:** όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω από τη διαγώνιο είναι μηδενικά.

- Ένας τετραγωνικός πίνακας όπως ο
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$
λέγεται **άνω τριγωνικός:** όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο είναι μηδενικά.

- Ένας τετραγωνικός πίνακας όπως ο
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
λέγεται **συμμετρικός:** είναι ίσος με τον ανάστροφό του ($A = A^T$).

- Ο $n \times n$ διαγώνιος πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του ίσα με 1,
$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$
λέγεται **μοναδιαίος** πίνακας $n \times n$.

3.2 Πράξεις πινάκων

3.2.1 Πρόσθεση

Η **πρόσθεση** δύο πινάκων, *που πρέπει να έχουν ίδιες διαστάσεις* $m \times n$, γίνεται προσθέτοντας τα αντίστοιχα στοιχεία τους. Π.χ. για δύο 3×4 πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -9 & 2 \\ -5 & 12 & 8 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 45 & -2 & -2 \\ -8 & -3 & 12 & 6 \\ 9 & 2 & 7 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 39 & 1 & -1 \\ -6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 14 & 15 & -8 \end{bmatrix}$$

Για την πρόσθεση έχουμε ότι:

- Ισχύουν η *αντιμεταθετική* και η *προσεταιριστική* ιδιότητα.
- *Ουδέτερο στοιχείο* είναι ο *μηδενικός πίνακας* (είναι όλα τα στοιχεία του μηδενικά) με τις κατάλληλες διαστάσεις.
- *Αντίθετος* ενός πίνακα A είναι ο $-A$ που έχει όλα τα στοιχεία του αντίθετα με τα αντίστοιχα του A.

Για τον ανάστροφο ενός αθροίσματος πινάκων ισχύει

$$(A+B)^T = A^T + B^T \ . \tag{3.4}$$

3.2.2 Πολλαπλασιασμός με αριθμό

Ο **βαθμωτός πολλαπλασιασμός** ενός αριθμού με έναν πίνακα (λA) δίνει έναν νέο πίνακα, τα στοιχεία του οποίου είναι αυτά του αρχικού πολλαπλασιασμένα με τον αριθμό ($(\lambda A)_{ij} = \lambda (A)_{ij}$):

$$6 \begin{bmatrix} 5 & -9 & 21 \\ 4 & 10 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & -54 & 126 \\ 24 & 60 & -18 \end{bmatrix} \ .$$

Ισχύουν οι ιδιότητες:

- $\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1\lambda_2)A$
- $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$
- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

3.2.3 Πολλαπλασιασμός

Ο **πολλαπλασιασμός πινάκων** ορίζεται για δύο πίνακες όταν *ο αριθμός των στηλών του πρώτου είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου.* Αν

- ο $A = [a_{ij}]$ είναι $m \times p$ και
- ο $B = [b_{ij}]$ είναι $p \times n$

τότε το γινόμενό τους,

- ο πίνακας $C = AB$, είναι $m \times n$

- και τα στοιχεία του δίνονται από τις σχέσεις

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \ . \tag{3.5}$$

Ο τύπος αυτός μας λέει ότι:
Αν δούμε τις γραμμές του πρώτου πίνακα και τις στήλες του δεύτερου ως διανύσματα *το στοιχείο* ij *του* $C = AB$ *είναι το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής* i *του* A *επί την στήλη* j *του* B:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & -6 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -69 \\ 45 & 34 \end{bmatrix}$$

Επειδή:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 7 + (-5) \cdot 1 + (-6) \cdot 2 &= 4 \\ 3 \cdot (-3) + (-5) \cdot 6 + (-6) \cdot 5 &= -69 \\ 4 \cdot 7 + 1 \cdot 1 + 8 \cdot 2 &= 45 \\ 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 6 + 8 \cdot 5 &= 34 \end{aligned}$$

Για τον πολλαπλασιασμό πινάκων ισχύουν οι ιδιότητες (αν τα γινόμενα ορίζονται):

- $A(BC) = (AB)C$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
- $A(B + C) = (AB) + (AC)$ και $(A + B)C = (AC) + (BC)$,

ενώ γενικά είναι

- $AB \neq BA$,

δηλαδή *δεν ισχύει στον πολλαπλασιασμό πινάκων η αντιμεταθετική ιδιότητα.*

Τα γινόμενα AB και BA όχι μόνο δεν είναι ίσα στη γενική περίπτωση αλλά ενδέχεται να μην ορίζονται και τα δύο ή να ορίζονται αλλά να έχουν διαφορετικές διαστάσεις.

Παράδειγμα 3-1

Για τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

θα είναι

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 35 \\ 8 & 34 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad BA = \begin{bmatrix} 12 & 30 \\ 13 & 29 \end{bmatrix} .$$

■

Παράδειγμα 3-2

Για τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

θα είναι

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 35 & 13 \\ 8 & 34 & 14 \end{bmatrix}$$

ενώ το BA δεν ορίζεται. ■

Παράδειγμα 3-3

Αναφέρθηκε παραπάνω το γινόμενο

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & -6 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -69 \\ 45 & 34 \end{bmatrix} .$$

Αν αλλάξουμε τη σειρά των πινάκων το γινόμενο θα είναι ένας πίνακας 3×3:

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 & -6 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -38 & -66 \\ 27 & 1 & 42 \\ 26 & -5 & 28 \end{bmatrix} .$$

■

Επειδή στον πολλαπλασιασμό πινάκων δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα *κάποιες γνωστές ταυτότητες που ισχύουν για αριθμούς διαφοροποιούνται στην* *περίπτωση πινάκων*. Ο σωστός τύπος για το τετράγωνο ενός αθροίσματος, για παράδειγμα, είναι

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \ . \tag{3.7}$$

Για τον *ανάστροφο ενός γινομένου πινάκων* ισχύει

$$(AB)^T = B^T A^T \ . \tag{3.8}$$

Ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού πινάκων είναι ο μοναδιαίος πίνακας (3.3) : Για έναν τετραγωνικό $(n \times n)$ πίνακα A ισχύει ότι

$$I_n A = A I_n = A \ . \tag{3.9}$$

(Αν ο A δεν είναι τετραγωνικός (είναι $m \times n$) ισχύει ότι

$$I_m A = A I_n = A \ .) \tag{3.10}$$

3.2.4 Αντίστροφος πίνακας

Αν για έναν τετραγωνικό $(n \times n)$ πίνακα A υπάρχει ένας πίνακας B τέτοιος ώστε

$$AB = BA = I_n \ , \tag{3.11}$$

ο B ονομάζεται **αντίστροφος** του A. Συμβολίζουμε

$$B = A^{-1} \tag{3.12}$$

και λέμε ότι ο A είναι *αντιστρεπτός* (ή αντιστρέψιμος). Θα έχουμε τότε και

$$A = B^{-1} \ .$$

Ένας πίνακας που δεν είναι αντιστρεπτός λέγεται **ιδιάζων** ή **ιδιόμορφος**.

Αν ένας πίνακας A είναι αντιστρεπτός θα είναι το ίδιο και ο ανάστροφός του και τότε

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \ . \tag{3.13}$$

Για τον *αντίστροφο ενός γινομένου πινάκων* ισχύει

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \ . \tag{3.14}$$

Αν ένας πίνακας A είναι 2×2,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \ ,$$

ισχύουν τα εξής:

- Είναι αντιστρεπτός αν ισχύει ότι

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0 \ .$$

  Ο αριθμός αυτός ονομάζεται *ορίζουσα* του πίνακα A και συμβολίζεται $|A|$ (κεφάλαιο 5).

- Ο αντίστροφος πίνακάς του θα είναι τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \ . \tag{3.15}$$

Παράδειγμα 3-4

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \ ,$$

τότε

$$|A| = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = 2 \qquad \text{και} \qquad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \ ,$$

οπότε πράγματι

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \ .$$

■

3.2.5 Δυνάμεις πίνακα

Αν ένας πίνακας είναι τετραγωνικός ορίζονται και οι *δυνάμεις* του. Για παράδειγμα

$$A^4 = AAAA \qquad \text{και} \qquad A^{-4} = A^{-1}A^{-1}A^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^4 \ .$$

Παράδειγμα 3-5

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \ .$$

Τότε

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

και

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix} .$$

■

3.2.6 Διαγώνιοι πίνακες

Για τους διαγώνιους πίνακες τα πράγματα είναι πολύ απλά: Αν (παίρνοντας για παράδειγμα 2×2 πίνακες)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

θα είναι

$$A^k = \begin{bmatrix} (a_1)^k & 0 \\ 0 & (a_2)^k \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_1 & 0 \\ 0 & 1/a_2 \end{bmatrix} . \tag{3.16}$$

(Στην περίπτωση που ένα από τα διαγώνια στοιχεία είναι μηδενικό ο πίνακας δεν είναι αντιστρεπτός.) Και αν

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

τότε

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 \end{bmatrix} . \tag{3.17}$$

3.3 Πίνακες και γραμμικά συστήματα

Κάθε γραμμικό σύστημα $m \times n$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία **εξίσωση πινάκων**:

$$A\underline{x} = \underline{b} \tag{3.18}$$

- Ο $m \times n$ πίνακας A ονομάζεται **πίνακας του συστήματος** και περιέχει σε κάθε γραμμή του τους συντελεστές των αγνώστων στην αντίστοιχη εξίσωση.

- Ο $n \times 1$ πίνακας – στήλη

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

είναι το **διάνυσμα των αγνώστων** του συστήματος.

- Ο $m \times 1$ πίνακας – στήλη

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

είναι το **διάνυσμα των σταθερών όρων** του συστήματος.

Παράδειγμα 3-6

Για το 3×4 σύστημα (2.2)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 20 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 30 \end{array}$$

θα είναι:

- $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- $$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

- $$\underline{b} = \begin{bmatrix} 20 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix}$$

■

Στην ενότητα 6.3 θα χρησιμοποιήσουμε την (3.18) για την επίλυση ενός τετραγωνικού συστήματος με τον αντίστροφο πίνακα του A.

Κεφάλαιο 4

Γραμμικά συστήματα: Επίλυση

4.1 Η μέθοδος Gauss

Σε ένα γραμμικό σύστημα, για παράδειγμα το 3×3 σύστημα

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \ , \end{array}$$

αν στον πίνακα του συστήματος,

$$\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] \ ,$$

προσθέσουμε ως μία επιπλέον στήλη το διάνυσμα των σταθερών όρων παίρνουμε τον **επαυξημένο πίνακα του συστήματος**:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right]$$

Στην **μέθοδο Gauss** (ή μέθοδο απαλοιφής του Gauss) εφαρμόζουμε στον επαυξημένο πίνακα τις 3 **στοιχειώδεις πράξεις γραμμών (ΣΠΓ):**

1. Εναλλαγή των θέσεων 2 γραμμών $\mathbf{r_i}$ και $\mathbf{r_j}$.
   Συμβολίζουμε: $\mathbf{r_i} \leftrightarrow \mathbf{r_j}$.

2. Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής $\mathbf{r_i}$ (κάθε στοιχείου της) με έναν αριθμό $\lambda \neq 0$.
   Συμβολίζουμε: $\mathbf{r_i} \leftarrow \lambda \mathbf{r_i}$.

3. Πρόσθεση στα στοιχεία μιας γραμμής $\mathbf{r_i}$ των αντίστοιχων στοιχείων μιας άλλης γραμμής $\mathbf{r_j}$ $(i \neq j)$ που έχει πολλαπλασιαστεί με έναν αριθμό. Συμβολίζουμε: $\mathbf{r_i} \leftarrow \mathbf{r_i} + \lambda \mathbf{r_j}$.

Οι πράξεις αυτές αντιστοιχούν σε πράξεις στις εξισώσεις που οδηγούν σε ισοδύναμο σύστημα. Ο σκοπός μας είναι να φέρουμε το σύστημα σε ένα τέτοιο ισοδύναμο που ο πίνακάς του θα είναι σε **κλιμακωτή μορφή**, γιατί τότε θα λύνεται εύκολα με προς τα πίσω αντικατάσταση. Ένας πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή όταν

- οι μηδενικές γραμμές του (αν έχει τέτοιες) βρίσκονται όλες στο κάτω μέρος του και
- ο **οδηγός** (δηλαδή το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο) κάθε μη μηδενικής γραμμής βρίσκεται πιο αριστερά από τον οδηγό της επόμενης μη μηδενικής γραμμής.

Η πιο σημαντική από τις ΣΠΓ είναι η τρίτη. Την χρησιμοποιούμε για να δημιουργούμε μηδενικά κάτω από τους οδηγούς σε μια διαδικασία που ξεκινάει από πάνω αριστερά και προχωράει προς τα κάτω και δεξιά, όπως στα παραδείγματα στη συνέχεια.

4.1.1 Μοναδική λύση

Όταν ένα σύστημα έχει **μοναδική λύση**, με την εφαρμογή ΣΠΓ στον αρχικό του επαυξημένο πίνακα, καταλήγουμε σε έναν κλιμακωτό πίνακα που *έχει τόσους οδηγούς όσες είναι και οι μεταβλητές (άγνωστοι) του συστήματος*.

Για παράδειγμα έστω το σύστημα:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array} \tag{4.1}$$

Έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 3r_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -4 & -14 & -18 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \leftarrow -\frac{1}{3} r_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -14 & -18 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 + 4r_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{array}\right]$$

Τώρα ο πίνακας είναι κλιμακωτός: Ο οδηγός 1 της 1ης γραμμής αντιστοιχεί στην x_1, ο οδηγός 1 της 2ης γραμμής αντιστοιχεί στην x_2 και ο οδηγός -6 της 3ης γραμμής αντιστοιχεί στην x_3. Ο πίνακας αυτός αντιστοιχεί στο ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 7 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ & & & - & 6x_3 & = & -2 \end{array}$$

Από την τελευταία εξίσωση αυτού του συστήματος έχουμε αμέσως ότι $x_3 = (-2)/(-6) = 1/3$ και με αντικατάσταση προς τα πίσω στις παραπάνω εξισώσεις βρίσκουμε $x_2 = 10/3$ και $x_1 = -4/3$. Η μοναδική λύση του συστήματος είναι λοιπόν η

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/3 \\ 10/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε εδώ το *διάνυσμα θέσης ενός σημείου* στον χώρο των 3 διαστάσεων. Αυτό είναι το σημείο τομής των 3 επιπέδων που περιγράφονται από τις εξισώσεις του συστήματος.

Ως δεύτερο παράδειγμα ας πάρουμε το ακόλουθο 4×4 σύστημα:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 9 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 7 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array} \tag{4.2}$$

Έχουμε:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & 2 & 0 & 1 & 9 \\ 3 & -3 & -1 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 1 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & -1 & -1 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 \leftarrow r_2 + 3r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + 4r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 + 2r_1}} \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & 2 & 5 & -5 \\ 0 & 14 & 4 & 9 & -7 \\ 0 & 5 & 3 & 4 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \leftarrow \frac{1}{6} r_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 14 & 4 & 9 & -7 \\ 0 & 5 & 3 & 4 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3 \leftarrow r_3 - 14r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 5r_2}} \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{6} & -\frac{16}{6} & \frac{28}{6} \\ 0 & 0 & \frac{8}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{23}{6} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{r_2 \leftarrow 6r_2 \\ r_3 \leftarrow 6r_3 \\ r_4 \leftarrow 6r_4}} \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & 2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -16 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & -23 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_4 \leftarrow r_4 + 2r_3} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & 2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -16 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -33 & 33 \end{array}\right]$$

Έχουμε 4 οδηγούς, όσους και αγνώστους, και επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση. Η διαδικασία της προς τα πίσω αντικατάστασης έχει ως εξής:

Η τελευταία εξίσωση του ισοδύναμου συστήματος μας δίνει:

$$x_4 = -1$$

Αντικαθιστούμε στην 3η εξίσωση το x_4:

$$-4x_3 + 16 = 28 \quad \Rightarrow \; x_3 = -3$$

Αντικαθιστούμε στην 2η εξίσωση τα x_4 και x_3:

$$6x_2 - 6 - 5 = -5 \quad \Rightarrow \; x_2 = 1$$

Και τέλος αντικαθιστούμε στην 1η εξίσωση τα x_4, x_3 και x_2:

$$-x_1 + 3 - 3 - 2 = -4 \quad \Rightarrow \; x_1 = 2$$

Η λύση του συστήματος είναι επομένως η

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Αυτό είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου στον (μαθηματικό) χώρο των 4 διαστάσεων.

4.1.2 Άπειρες λύσεις

Όταν ένα σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**, με την εφαρμογή ΣΠΓ στον αρχικό επαυξημένο πίνακα, καταλήγουμε σε έναν κλιμακωτό πίνακα που *έχει λιγότερους οδηγούς από τις μεταβλητές του συστήματος, ενώ δεν μας δίνει καμία αδύνατη εξίσωση.*

Οι μεταβλητές στις οποίες αντιστοιχούν οδηγοί ονομάζονται **βασικές μεταβλητές**, ενώ αυτές στις οποίες δεν αντιστοιχούν οδηγοί ονομάζονται **ελεύθερες μεταβλητές** και χρησιμοποιούνται ως **παράμετροι**. Οι παράμετροι μπορούν να πάρουν οποιεσδήποτε τιμές και συναρτήσει αυτών εκφράζονται οι βασικές μεταβλητές.

Για παράδειγμα, για το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 10 \end{array} \tag{4.3}$$

έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 7 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 4r_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - r_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Βλέπουμε ότι οι x_1 και x_2 είναι βασικές μεταβλητές αφού σε αυτές αντιστοιχούν οι οδηγοί 1 και -1. Για την x_3 δεν υπάρχει αντίστοιχος οδηγός. Είναι επομένως ελεύθερη μεταβλητή και την χρησιμοποιούμε ως παράμετρο (μπορούμε να την ονομάσουμε t). Οι άπειρες λύσεις, όπως προκύπτουν με προς τα πίσω αντικατάσταση στο αντίστοιχο σύστημα, δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -t+4 \\ x_2 & = & -t-2 \\ x_3 & = & t \end{array}$$

με $t \in \mathbb{R}$. Αυτές είναι οι *παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας* στην οποία τέμνονται τα 3 επίπεδα που περιγράφονται από τις εξισώσεις του συστήματος. Με διανυσματικό συμβολισμό οι λύσεις είναι:

$$\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right] = t \left[\begin{array}{r} -1 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{r} 4 \\ -2 \\ 0 \end{array}\right]$$

Αυτή η έκφραση λέμε ότι είναι η **γενική λύση** του συστήματος. Τώρα έχουμε την *παραμετρική διανυσματική εξίσωση της ευθείας*. Η εξίσωση αυτή μας λέει ότι η ευθεία περνάει από το σημείο με διάνυσμα θέσης το $(4,-2,0)$ και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $(-1,-1,1)$.

Γενικά:

- Αν η λύση ενός συστήματος περιέχει n_f παραμέτρους (δηλαδή με την επίλυση του συστήματος έχουν προκύψει n_f ελεύθερες μεταβλητές) θα αντιστοιχεί στις παραμετρικές εξισώσεις ενός υπερεπιπέδου διάστασης n_f.

Στο επόμενο παράδειγμα η γενική λύση θα περιέχει 2 ελεύθερες παραμέτρους:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & - & 10x_3 & = & -6 \\ 7x_1 & + & 14x_2 & + & 35x_3 & = & 21 \end{array} \tag{4.4}$$

Έχουμε στην ουσία την ίδια εξίσωση 3 φορές και παίρνουμε:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & -4 & -10 & -6 \\ 7 & 14 & 35 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3 - 7r_1]{r_2 \leftarrow r_2 + 2r_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ο μόνος οδηγός που έχουμε, ο 1, αντιστοιχεί στην x_1. Παίρνουμε, επομένως, τις x_2 και x_3 ως ελεύθερες παραμέτρους και ονομάζοντάς τες s και t αντίστοιχα έχουμε τις άπειρες λύσεις:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -2s - 5t + 3 \\ x_2 & = & s \\ x_3 & = & t \end{array}$$

για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών s και t. Αυτές είναι οι *παραμετρικές εξισώσεις του επιπέδου* $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3$. Η γενική λύση του συστήματος είναι η *παραμετρική διανυσματική εξίσωση του επιπέδου* αυτού :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση αυτή μας λέει ότι το επίπεδό μας είναι παράλληλο με αυτό που ορίζεται από τα διανύσματα $(-2, 1, 0)$ και $(-5, 0, 1)$ και περνάει από το σημείο με διάνυσμα θέσης το $(3, 0, 0)$.

4.1.3 Καμία λύση

Όταν ένα σύστημα δεν έχει **καμία λύση**, με την εφαρμογή ΣΠΓ στον αρχικό επαυξημένο πίνακα, παίρνουμε έναν πίνακα που *αντιστοιχεί σε σύστημα με τουλάχιστον μία αδύνατη εξίσωση*. Για παράδειγμα, για το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 4 \end{array} \tag{4.5}$$

έχουμε:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 7 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 4r_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - r_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Η τελευταία γραμμή αντιστοιχεί στην αδύνατη εξίσωση

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2$$

και συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο.

4.1.4 Συστήματα με $m \neq n$

Η μέθοδος Gauss εφαρμόζεται με τον ίδιο τρόπο σε συστήματα $m \times n$ με διαφορετικό αριθμό εξισώσεων από αγνώστους.

Για το σύστημα 3×2

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & = & 7 \end{array} \tag{4.6}$$

έχουμε:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3 - 5r_1]{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 2r_2} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Βλέπουμε ότι οι οδηγοί είναι 2, όσοι και οι άγνωστοι και η τρίτη γραμμή έχει μηδενιστεί ολόκληρη. Το σύστημα επομένως έχει μοναδική λύση, που την βρίσκουμε με προς τα πίσω αντικατάσταση:

$$x_1 = \frac{5}{3} \qquad x_2 = -\frac{1}{3}$$

Για το σύστημα 2×3

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 10 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 8 \end{array} \tag{4.7}$$

έχουμε:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -3 & 10 \\ 4 & -2 & 1 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - 4r_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -3 & 10 \\ 0 & -18 & 13 & -32 \end{array}\right]$$

Οι οδηγοί 1 και -18 αντιστοιχούν στις x_1 και x_2. Η x_3 είναι ελεύθερη μεταβλητή και την θέτουμε ίση με t. Με αντικατάσταση από κάτω προς τα πάνω βρίσκουμε

$$\begin{aligned} x_2 &= -(13/18)t + 16/9 \\ x_1 &= -(53/9)t + 26/9 \end{aligned}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Το σύστημα δεν θα μπορούσε να έχει μοναδική λύση, αφού για αυτό θα χρειάζονταν 3 οδηγοί (όσοι οι άγνωστοι) ενώ οι γραμμές (εξισώσεις) είναι μόνο 2. Έτσι, από το παράδειγμα αυτό, συμπεραίνουμε γενικά πως *όταν οι άγνωστοι είναι περισσότεροι από τις εξισώσεις* ($m < n$):

- αν το σύστημα δεν είναι αδύνατο θα έχει άπειρες λύσεις,
- αν το σύστημα είναι ομογενές θα έχει άπειρες λύσεις.

4.2 Η μέθοδος Gauss – Jordan

Αν έχοντας φέρει τον πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή συνεχίσουμε με ΣΠΓ, από κάτω προς τα πάνω τώρα, για να δημιοργήσουμε μηδενικά και πάνω από την κύρια διαγώνιο, εφαρμόζουμε την μέθοδο **Gauss – Jordan** με σκοπό να πάρουμε τον **ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα** του συστήματος. Αυτός είναι ένας πίνακας για τον οποίο ισχύουν τα ακόλουθα:

- Είναι κλιμακωτός.
- Όλοι οι οδηγοί είναι ίσοι με 1.
- Ο οδηγός κάθε γραμμής είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης του.

Έτσι, στο προηγούμενο παράδειγμα του συστήματος (4.1) με μοναδική λύση η συνέχεια θα είναι:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \leftarrow \frac{1}{3} r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftarrow r_1 - 5r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{16}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftarrow r_1 - 2r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Καταλήξαμε στον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα ο οποίος μας δίνει αμέσως τη λύση (-4/3, 10/3, 1/3) του συστήματος.

Στο παράδειγμα του συστήματος (4.3) με τις άπειρες λύσεις έχουμε για τη συνέχεια:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftarrow r_1 - r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftarrow \frac{1}{2} r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας ισοδυναμεί επομένως με το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & & & x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{array},$$

όπου διαβάζουμε αμέσως τις παραμετρικές λύσεις που είχαμε και προηγουμένως.

4.3 Γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες

Όταν ένας πίνακας B μπορεί να προκύψει από έναν πίνακα A με μια σειρά από ΣΠΓ λέμε ότι οι δύο πίνακες είναι **γραμμοϊσοδύναμοι**.

Οι τρεις ΣΠΓ είναι αντιστρεπτές πράξεις. (Η $r_i \leftarrow r_i + \lambda r_j$ λ.χ. αντιστρέφεται από την $r_i \leftarrow r_i - \lambda r_j$.) Έτσι η γραμμοϊσοδυναμία είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική, είναι δηλαδή σχέση ισοδυναμίας: $A \sim B$. Το σύνολο των πινάκων διαμερίζεται επομένως σε κλάσεις ισοδυναμίας (ενότητα 1.1.2).

Ισχύουν τα ακόλουθα:

- Ο κλιμακωτός γραμμοϊσοδύναμος ενός πίνακα δεν είναι μοναδικός. (Εξαρτάται από το από ποιες ακριβώς ΣΠΓ έχει προκύψει.)

- Ο ανηγμένος κλιμακωτός γραμμοϊσοδύναμος ενός πίνακα είναι μοναδικός.

- Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας που αντιστοιχεί σε ένα $n \times n$ σύστημα με μοναδική λύση είναι ο I_n.

4.4 Τάξη πίνακα

Όταν έχουμε έναν πίνακα A και πάρουμε έναν ισοδύναμο κλιμακωτό πίνακα, ο αριθμός των μη μηδενικών γραμμών του τελευταίου ονομάζεται **τάξη** του A και συμβολίζεται $rank(A)$. (Ο A μπορεί να έχει πολλούς ισοδύναμους κλιμακωτούς πίνακες, όλοι όμως θα έχουν τον ίδιο αριθμό μη μηδενικών γραμμών.)

Για τον πίνακα του συστήματος (4.1) έχουμε $rank(A) = 3$ και για αυτόν του συστήματος (4.3) $rank(A) = 2$.

Όπως είδαμε στα προηγούμενα, σε ένα σύστημα που έχει λύσεις

- ο αριθμός των βασικών μεταβλητών του είναι ίσος με τον αριθμό των μη μηδενικών γραμμών του αντίστοιχου κλιμακωτού πίνακα (αφού σε αυτές τις γραμμές αντιστοιχούν οδηγοί), ενώ
- ο αριθμός των ελεύθερων παραμέτρων των λύσεων (n_f) είναι ίσος με τον αριθμό των μεταβλητών στις οποίες δεν αντιστοιχούν οδηγοί.

Ισχύει επομένως, για ένα σύστημα $m \times n$, η σχέση:

$$rank(A) + n_f = n \tag{4.8}$$

Έτσι:

- Το 3×3 σύστημα (4.1) δεν είχε καμία ελεύθερη παράμετρο:
$$n_f = n - rank(A) = 3 - 3 = 0$$
- Το 4×4 σύστημα (4.2) δεν είχε καμία ελεύθερη παράμετρο:
$$n_f = n - rank(A) = 4 - 4 = 0$$
- Το 3×3 σύστημα (4.3) είχε 1 ελεύθερη παράμετρο:
$$n_f = n - rank(A) = 3 - 2 = 1$$
- Το 3×3 σύστημα (4.4) είχε 2 ελεύθερες παραμέτρους:
$$n_f = n - rank(A) = 3 - 1 = 2$$
- Το 3×2 σύστημα (4.6) δεν είχε καμία ελεύθερη παράμετρο:
$$n_f = n - rank(A) = 2 - 2 = 0$$
- Το 2×3 σύστημα (4.7) είχε 1 ελεύθερη παράμετρο:
$$n_f = n - rank(A) = 3 - 2 = 1$$

Κεφάλαιο 5

Ορίζουσες

5.1 Ορίζουσα πίνακα

Σε κάθε $n \times n$ πίνακα A αντιστοιχεί ένας αριθμός που ονομάζεται **ορίζουσα** του A και συμβολίζεται $|A|$ ή $det(A)$.

- Για $n = 2$ είναι:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{5.1}$$

- Για $n = 3$:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Παράδειγμα 5-1

-
$$\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 5(-8) = 54$$

-
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 4 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \cdot 1 \\ &- 3 \cdot 2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \\ &= 28 - 30 + 18 - 42 + 20 - 8 \\ &= -14 \end{aligned}$$

■

Ο γενικός τύπος για τυχαίο n δεν είναι εύχρηστος. Ούτε όμως και ο υπολογισμός μιας 3×3 ορίζουσας με τον τύπο 5.2, όπως στο παράδειγμα, είναι βολικός και τα πράγματα γίνονται πολύ χειρότερα για μεγαλύτερα n. Στην πράξη, αν έχουμε ορίζουσα μεγαλύτερη από 2×2 την υπολογίζουμε

- είτε αναπτύσσοντάς την κατά μία γραμμή ή μία στήλη
- είτε χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών.

5.2 Ανάπτυγμα ορίζουσας

Για να αναπτύξουμε μία ορίζουσα κατά μία γραμμή i (ή στήλη j) πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο a_{ij} αυτής της γραμμής (ή στήλης) με το **αλγεβρικό συμπλήρωμά** του A_{ij} και προσθέτουμε τα γινόμενα:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \tag{5.3}$$

$$(|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}) \tag{5.4}$$

Το αλγεβρικό συμπλήρωμα A_{ij} είναι ίσο με την $(n-1) \times (n-1)$ **υποορίζουσα** M_{ij}, που προκύπτει από την αρχική αν διαγράψουμε τις γραμμές i και j, πολλαπλασιασμένη επί τον παράγοντα $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{5.5}$$

(Προσοχή στα σύμβολα: A_{ij} είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij} του πίνακα A, ενώ $(A)_{ij}$ είναι άλλος συμβολισμός για το ίδιο το a_{ij}.) Ο παράγοντας $(-1)^{i+j}$ είναι ίσος με 1 για το A_{11} και εναλλάσσεται μεταξύ των 1 και -1 κάθε φορά που αλλάζει η γραμμή ή η στήλη. Σχηματικά, για $n = 3$ και $n = 4$:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Έτσι παίρνουμε τα πρόσημα που πρέπει να μπουν μπροστά από τις αντίστοιχες υποορίζουσες για να υπολογίσουμε τα αντίστοιχα αλγεβρικά συμπληρώματα.

Παράδειγμα 5-2

Αναπτύσσουμε την 3×3 ορίζουσα του παραδείγματος 5-1 κατά την δεύτερη γραμμή:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} &= 2\cdot(-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -2\cdot 11 + 4\cdot 5 - 6\cdot 2 \\ &= -22 + 20 - 12 \\ &= -14\end{aligned}$$

Ενώ, αν την αναπτύξουμε κατά την πρώτη στήλη, έχουμε:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -2 - 2\cdot 11 + 10 \\ &= -14\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 5-3

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 2 & 3 & -9 \\ -8 & 12 & 5 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} + (-6)(-1)\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot 123 + 6\cdot(-62) + 4\cdot 48 \\ &= -57\end{aligned}$$

■

5.3 Γεωμετρική ερμηνεία της ορίζουσας

- Το **εμβαδόν του παραλληλογράμμου** που ορίζεται από 2 διανύσματα $\underline{a} = (a_1, a_2)$ και $\underline{b} = (b_1, b_2)$, στον διδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^2$, είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας που σχηματίζεται από τις συντεταγμένες των διανυσμάτων αυτών:

$$S = |D|\,, \quad \text{όπου} \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{5.6}$$

- Ο **όγκος του παραλληλεπιπέδου** που ορίζεται από 3 διανύσματα $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ και $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$, στον τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$, είναι ίσος με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας που σχηματίζεται από τις συντεταγμένες των διανυσμάτων αυτών:

$$V = |D|\,, \quad \text{όπου} \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{5.7}$$

- Γενικά, ο **όγκος του n-διάστατου παραλληλεπιπέδου** που ορίζεται από n διανύσματα στις n διαστάσεις (χώρος $\mathbb{R}^n$) δίνεται από την απόλυτη τιμή της $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ **ορίζουσας** των συντεταγμένων τους.

5.4 Ιδιότητες και υπολογισμός οριζουσών

Από τη γεωμετρική ερμηνεία της ορίζουσας συνάγονται εύκολα οι περισσότερες από τις ιδιότητες των οριζουσών:

1. Αν μία ορίζουσα $|A|$ έχει μια μηδενική γραμμή τότε $|A| = 0$.

2. Αν μια ορίζουσα έχει δύο γραμμές ίδιες είναι ίση με 0.

3. Αν δύο γραμμές μιας ορίζουσας αλλάξουν θέση μεταξύ τους ($r_i \leftrightarrow r_j$) η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο ($|A| \leftarrow -|A|$).

4. Αν όλα τα στοιχεία μιας γραμμής μιας ορίζουσας πολλαπλασιαστούν με έναν αριθμό ($r_i \leftarrow \lambda r_i$) η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με αυτόν τον αριθμό ($|A| \leftarrow \lambda|A|$).

5. Αν σε μία γραμμή μιας ορίζουσας προσθέσουμε (στοιχείο προς στοιχείο) ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής ($r_i \leftarrow r_i + \lambda r_j$) η ορίζουσα δεν αλλάζει.

6. Αν τα στοιχεία μιας γραμμής μιας ορίζουσας είναι αθροίσματα δύο όρων η ορίζουσα είναι ίση με το άθροισμα των δύο αντίστοιχων οριζουσών. Π.χ. για ορίζουσες 2×2 έχουμε

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_1' & a_2 + a_2' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} .$$

7. Η ορίζουσα που σχηματίζεται από τα μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα I_n, είναι ίση με τη μονάδα:

$$|I_n| = 1\ . \tag{5.8}$$

8. Η ορίζουσα ενός διαγώνιου πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου του.

9. Η ορίζουσα ενός τριγωνικού (άνω ή κάτω) πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου του.

Ό,τι αναφέρεται στα παραπάνω πως ισχύει για τις γραμμές ισχύει και για τις στήλες μιας ορίζουσας.

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες αυτές μία ορίζουσα μπορεί να μετατραπεί σε **τριγωνική μορφή** και να υπολογιστεί τότε αμέσως ως το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου της. Η διαδικασία αντιστοιχεί με αυτήν που εφαρμόζουμε για να φέρουμε έναν πίνακα σε κλιμακωτή μορφή. Βλέπουμε εδώ τις τρεις ΣΠΓ στις ιδιότητες 3, 4 και 5. Σε αντίθεση με την ισοδυναμία πινάκων εδώ πρέπει να προσέξουμε ότι μόνο η τρίτη ΣΠΓ δεν αλλάζει την τιμή μιας ορίζουσας.

Παράδειγμα 5-4

Για την ορίζουσα του παραδείγματος 5-1 έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1(-2)7 = -14$$

(Το πρώτο βήμα έγινε με τις ΣΠΓ $r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1$ και $r_3 \leftarrow r_3 - r_1$ ενώ το δεύτερο με την $r_3 \leftarrow r_3 + r_2$.) ■

Παράδειγμα 5-5

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 18$$

(Το πρώτο βήμα έγινε με τις ΣΠΓ $r_1 \leftrightarrow r_2$ και $r_3 \leftrightarrow r_4$ και τα δύο αρνητικά πρόσημα που προέκυψαν αλληλοεξουδετερώθηκαν.) ■

Ενδέχεται να μη χρειάζεται να φτάσουμε στην τριγωνική μορφή μιας ορίζουσας αλλά να μας αρκεί να έχουμε μία γραμμή ή στήλη της με ένα μόνο μη μηδενικό στοιχείο για να υπολογίσουμε την ορίζουσα με ανάπτυξη κατά αυτήν τη γραμμή ή στήλη.

Παράδειγμα 5-6

Στο παράδειγμα 5-4 με το πρώτο βήμα είχαμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

και η τιμή της ορίζουσας μπορούσε να υπολογιστεί αμέσως με ανάπτυγμα κατά την πρώτη στήλη:

$$1 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -14$$

■

Σε σχέση με τις πράξεις πινάκων ισχύουν τα ακόλουθα (οι A, B είναι πίνακες $n \times n$):

- $$|A^T| = |A| \tag{5.9}$$
- $$|\lambda A| = \lambda^n |A| \tag{5.10}$$
- $$|AB| = |A| \, |B| \tag{5.11}$$
- $$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \tag{5.12}$$

(Για την τελευταία ιδιότητα ο A πρέπει να είναι αντιστρεπτός.)

Παράδειγμα 5-7

Στο παράδειγμα 3-1 είχαμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} 7 & 35 \\ 8 & 34 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 12 & 30 \\ 13 & 29 \end{bmatrix}$$

Οι αντίστοιχες ορίζουσες είναι

$$|A| = 4 - 2 \cdot 5 = -6 \qquad |B| = 2 \cdot 6 - 5 = 7$$
$$|AB| = 7 \cdot 34 - 8 \cdot 35 = -42 \qquad |BA| = 12 \cdot 29 - 13 \cdot 30 = -42$$

και βλέπουμε ότι οι $|AB|$ και $|BA|$ επαληθεύουν την (5.11). ■

Παράδειγμα 5-8

Στο παράδειγμα 3-4 είχαμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5/2 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε:

$$|A| = 2 \quad \text{και} \quad |A^{-1}| = (5/2) - (-2)(-1) = 1/2 = 1/|A|$$

■

5.5 Επίλυση συστήματος με ορίζουσες

Για ένα σύστημα $n \times n$ με μοναδική λύση ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι ο I_n (ενότητα 4.2). Με την ίδιες ΣΠΓ μπορεί να υπολογιστεί και η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος. Η τελευταία επομένως είναι ένα μη μηδενικό πολλαπλάσιο της $|I_n|$. (Αν έχει χρησιμοποιηθεί μόνο η τρίτη ΣΠΓ είναι ακριβώς ίση με την $|I_n| = 1$.) Αν το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση κάθε κλιμακωτός πίνακάς του θα έχει μία τουλάχιστον μηδενική γραμμή. Έχουμε έτσι το εξής κριτήριο:

- Ένα σύστημα $n \times n$ έχει *μοναδική λύση*, αν και μόνο αν για την ορίζουσα D του πίνακά του ισχύει:
$$D \neq 0 \tag{5.13}$$

Στην περίπτωση αυτή έναν εναλλακτικό τρόπο επίλυσης του συστήματος

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

μας δίνει ο **κανόνας του Cramer**:

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \tag{5.14}$$

όπου

- $D = |A|$,
- D_i η ορίζουσα που προκύπτει από την $|A|$ αν αντικατασταθεί η στήλη i από τη στήλη $\underline{b}$.

Παράδειγμα 5-9

Στο πρώτο παράδειγμα της ενότητας 4.1.1 (σύστημα 3×3 με μοναδική λύση) είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Για τον υπολογισμό της $D = |A|$ μπορούμε να πάρουμε τον ισοδύναμο με τον A κλιμακωτό πίνακα που είχε προκύψει:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Κατά την διαδικασία της εύρεσής του η μόνη από τις ΣΠΓ που αλλάζει την τιμή της ορίζουσας είναι η $r_2 \leftarrow -\frac{1}{3}r_2$, η οποία για τον υπολογισμό της ορίζουσας σημαίνει ουσιαστικά ότι βγάζουμε από τη δεύτερη γραμμή κοινό παράγοντα το -3. Επομένως:

$$D = (-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 18$$

Για τις άλλες ορίζουσες έχουμε:

$$\begin{aligned}
D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= 7\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 7(-7) - 2(-10) + 5 \cdot 1 \\
&= -24 \\
D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (-10) - 7(-10) + 5 \cdot 0 \\
&= 60
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -1 - 2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Η (5.14) τώρα μας ξαναδίνει τις λύσεις:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-24}{18} = -\frac{4}{3} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

■

Κεφάλαιο 6

Υπολογισμοί αντίστροφου πίνακα

6.1 Υπολογισμός με τη μέθοδο Gauss – Jordan

Αν ο πίνακας X είναι ο αντίστροφος του A θα ισχύει

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(αν πάρουμε για παράδειγμα πίνακες 3×3).

Έτσι όπως γίνεται ο πολλαπλασιασμός πινάκων η πρώτη στήλη του μοναδιαίου πίνακα προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του A με την πρώτη στήλη του X:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε εδώ ένα σύστημα που οι λύσεις του είναι τα στοιχεία της πρώτης στήλης του X. Τα αντίστοιχα όμως ισχύουν και για τις άλλες στήλες του X. Για να προσδιορίσουμε, επομένως, όλα τα στοιχεία του X πρέπει να λύσουμε τρία συστήματα που όλα έχουν τον ίδιο πίνακα (τον A) και διαφοροποιούνται στη δεξιά στήλη του επαυξημένου τους, η οποία είναι η αντίστοιχη κάθε φορά στήλη του μοναδιαίου. Μπορούμε να λύσουμε και τα τρία αυτά συστήματα μαζί χρησιμοποιώντας την *μέθοδο Gauss – Jordan με τον τριπλά επαυξημένο πίνακα*:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Αν, στο τέλος της διαδικασίας, προκύψει στο αριστερό μέρος ο μοναδιαίος πίνακας στο δεξί θα είναι ο A^{-1}.

- Αν, κατά τη διαδικασία, προκύψει μηδενική γραμμή στο αριστερό μέρος σημαίνει ότι ο A δεν είναι αντιστρεπτός.

Παράδειγμα 6-1

Για τον πίνακα του συστήματος (4.1) της 4.1.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -14 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -4 & -14 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{18} & \frac{4}{18} & -\frac{1}{6} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{13}{18} & -\frac{20}{18} & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{18} & -\frac{14}{18} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{18} & \frac{4}{18} & -\frac{1}{6} \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{18} & \frac{8}{18} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{18} & -\frac{14}{18} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{18} & \frac{4}{18} & -\frac{1}{6} \end{array}\right]$$

Επομένως ο αντίστροφος πίνακας είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -7 & 8 & 3 \\ 10 & -14 & 6 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} .$$

■

6.2 Υπολογισμός με τον προσαρτημένο πίνακα

Ο **προσαρτημένος** (ή **συναφής**) πίνακας $adjA$ ενός τετραγωνικού πίνακα A προκύπτει αν στη θέση κάθε στοιχείου a_{ij} βάλουμε το αλγεβρικό του συμπλήρωμα A_{ij} και μετά πάρουμε τον ανάστροφο πίνακα:

$$adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

(Εδώ ο A είναι για παράδειγμα 3×3.)

Αν πολλαπλασιάσουμε τον A με τον $adjA$ παίρνουμε:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

Τα διαγώνια γινόμενα προκύπτουν ίσα με $|A|$ γιατί είναι ακριβώς τα αναπτύγματα της ορίζουσας κατά τις τρεις γραμμές της. Τα μη διαγώνια είναι μηδενικά επειδή αποτελούν αναπτύγματα οριζουσών με δύο γραμμές ίσες. Έχουμε έτσι ουσιαστικά έναν τύπο για τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adjA \tag{6.2}$$

Ισχύει ότι:

- Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι *αντιστρεπτός* αν και μόνο αν:

$$|A| \neq 0 \tag{6.3}$$

(Στην περίπτωση όπου $n = 2$ ο τύπος (6.2) μας δίνει τον (3.15):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Εδώ οι υποορίζουσες, που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των αλγεβρικών συμπληρωμάτων, είναι 1×1, δηλαδή απλώς αριθμοί.)

Παράδειγμα 6-2

Θα εφαρμόσουμε και τον (6.2) για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

του συστήματος (4.1).

Υπολογίζουμε πρώτα τα συμπληρωματικά των στοιχείων του A για κάθε γραμμή:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -14 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Τα τοποθετούμε σε στήλες (για να πάρουμε τον ανάστροφο) και βρίσκουμε:

$$adj A = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 3 \\ 10 & -14 & 6 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Στο παράδειγμα 5-9 είχαμε υπολογίσει την ορίζουσα του πίνακα, $|A| = 18$, κι επομένως ο τύπος (6.2) μας δίνει πάλι ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -7 & 8 & 3 \\ 10 & -14 & 6 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} .$$

■

6.3 Επίλυση συστήματος $n \times n$ με τον αντίστροφο πίνακα

Αν σε ένα σύστημα $n \times n$,

$$A\underline{x} = \underline{b} \ , \tag{6.4}$$

ο πίνακας A έχει αντίστροφο πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση από αριστερά με τον A^{-1} και παίρνουμε

$$\begin{aligned} & A^{-1}A\underline{x} &=& A^{-1}\underline{b} \\ \Rightarrow & I_n\underline{x} &=& A^{-1}\underline{b}\ . \end{aligned}$$

Η λύση δηλαδή του συστήματος δίνεται από τον τύπο:

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \tag{6.5}$$

Επομένως:

- Όταν ο πίνακας ενός τετραγωνικού συστήματος είναι αντιστρεπτός το σύστημα έχει *μοναδική λύση*, που δίνεται για κάθε $\underline{b}$ από την τελευταία σχέση.

Παράδειγμα 6-3

Θα υπολογίσουμε ακόμη μία φορά τη λύση του συστήματος (4.1), που έχει

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\ ,\quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\ ,\quad A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -7 & 8 & 3 \\ 10 & -14 & 6 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Θα είναι:

$$\underline{x} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -7 & 8 & 3 \\ 10 & -14 & 6 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -24 \\ 60 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

■

6.4 Ισοδύναμες προτάσεις για έναν πίνακα $n \times n$

Από τα μέχρι τώρα προκύπτει ότι, για έναν τετραγωνικό ($n \times n$) πίνακα A, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- Το σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\underline{b}$.

- Ο γραμμοϊσοδύναμος του A ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι ο I_n.

- Το ομογενές σύστημα $A\underline{x} = \underline{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση.
- Για την τάξη του πίνακα ισχύει: $rank(A) = n$.
- Για την ορίζουσα του πίνακα ισχύει: $|A| \neq 0$.
- Ο πίνακας έχει αντίστροφο.

Κεφάλαιο 7

Διανυσματικοί χώροι

7.1 Τι είναι ένας διανυσματικός χώρος

Ξεκινώντας από τα γνωστά μας διανύσματα, τα οποία μπορούμε να προσθέτουμε ή να πολλαπλασιάζουμε με αριθμούς, και γενικεύοντας, οδηγούμαστε στην έννοια του διανυσματικού χώρου:

- Ένας **διανυσματικός χώρος** είναι ένα σύνολο V, με στοιχεία που ονομάζονται διανύσματα, στο οποίο ορίζονται οι πράξεις της *πρόσθεσης* και του *πολλαπλασιασμού με αριθμό*. Τα αποτελέσματα αυτών των πράξεων είναι πάλι στοιχεία του V (λέμε ότι το V είναι *κλειστό* ως προς αυτές τις πράξεις). Όπως και στα συνήθη διανύσματα ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

  – $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ για $v_1, v_2, v_3 \in V$

  – $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ για $v_1, v_2 \in V$

  – $\exists\, 0_V \in V$ με $v + 0_V = v$ για κάθε $v \in V$

  – $\forall\, v \in V$ υπάρχει το $-v \in V$ με $v + (-v) = 0_V$

  και

  – $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$

  – $(\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$

  – $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$

  – $1v = v$

  όπου $\lambda, \mu, \lambda_1, \lambda_2$ είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί και v, v_1, v_2, v_3 στοιχεία του V. Το σύμβολο $+$ στα προηγούμενα χρησιμοποιείται και για την πρόσθεση στον V και για την πρόσθεση αριθμών. Αντίστοιχα έχουμε δύο είδη πολλαπλασιασμού. Αν οι αριθμοί είναι από το $\mathbb{R}$ έχουμε έναν *πραγματικό διανυσματικό χώρο* ενώ αν είναι από το $\mathbb{C}$ έχουμε έναν *μιγαδικό διανυσματικό χώρο.*

(Συμβολισμός: Στη γενική περίπτωση ενός διανυσματικού χώρου για τα διανύσματα θα χρησιμοποιούμε τα γράμματα v, u, w χωρίς υπογράμμιση. Το μηδενικό διάνυσμα συμβολίζεται με το 0 με δείκτη το σύμβολο του διανυσματικού χώρου.)

Παράδειγμα 7-1

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων:

1. Τα σύνολα $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ κτλ, δηλαδή τα σύνολα των συνηθισμένων διανυσμάτων στον μονοδιάστατο, διδιάστατο, τρισδιάστατο, τετραδιάστατο κτλ αντίστοιχο χώρο. Αυτοί είναι οι αρχετυπικοί διανυσματικοί χώροι.

2. Τα σύνολα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

3. Το σύνολο $\mathcal{M}_{mn}$ των πινάκων $m \times n$ με πράξεις την πρόσθεση πινάκων και τον πολλαπλασιασμό πίνακα με αριθμό.

4. Το σύνολο $\mathcal{P}_n$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού $\leq n$. Το άθροισμα δύο τέτοιων πολυωνύμων έχει κι αυτό βαθμό $\leq n$, το ίδιο και ένα πολυώνυμο που έχει πολλαπλασιαστεί με πραγματικό αριθμό. Οι δύο αυτές πράξεις έχουν όλες τις ιδιότητες που απαιτούνται από τον ορισμό ενός διανυσματικού χώρου.

5. Το σύνολο $\mathcal{P}$ όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές.

6. Το σύνολο των λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος $A\underline{x} = \underline{0}$. Αν $\underline{x_1}$, $\underline{x_2}$ είναι δύο τέτοιες λύσεις έχουμε ότι

$$A(\underline{x_1} + \underline{x_2}) = \underline{0}$$

και

$$A(\lambda\underline{x_1}) = \underline{0} \ ,$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

■

Παράδειγμα 7-2

Το σύνολο $\mathcal{F}$ των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, αν ορίσουμε ως άθροισμα δύο συναρτήσεων f και g την $f+g$ με

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

και ως γινόμενο μιας συνάρτησης f με έναν αριθμό λ την λf με

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

($\forall\ x \in \mathbb{R}$), είναι ένας διανυσματικός χώρος. ■

Σε κάθε διανυσματικό χώρο V ισχύουν τα εξής (όπου v διάνυσμα και λ αριθμός):

- $0v = 0_V$
- $\lambda 0_V = 0_V$
- $-1v = -v$
- Αν $\lambda v = 0_V$ τότε $\lambda = 0$ ή $v = 0_V$.

7.2 Υπόχωροι

Υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου V είναι ένα υποσύνολο του V το οποίο είναι και αυτό από μόνο του διανυσματικός χώρος με τις ίδιες πράξεις.

Επειδή οι πράξεις αυτές έχουν τις απαιτούμενες ιδιότητες, *αν ένα υποσύνολο του V είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με αριθμό τότε θα είναι και υπόχωρος*. Συνδυαστικά μπορούμε να πούμε ότι

- για να είναι το $S \subset V$ υπόχωρος αρκεί, αν $v_1, v_2 \in S$, το διάνυσμα $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ (για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$) να ανήκει στο S.

Δύο σίγουροι υπόχωροι του V είναι το ίδιο το V και το σύνολο $\{0_V\}$ (*τετριμμένοι υπόχωροι*). Σε διαφορετική από αυτές τις δύο περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε έναν *γνήσιο υπόχωρο*.

Κάθε υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου *περιέχει το μηδενικό διάνυσμα*.

Παράδειγμα 7-3

Το σύνολο

$$P = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} | x + y + z = 0 \} \ ,$$

δηλαδή το σύνολο των διανυσμάτων θέσης των σημείων του επιπέδου $x+y+z = 0$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, αφού για δύο διανύσματα $\underline{r_1}, \underline{r_2} \in P$ έχουμε

$$\lambda_1 \underline{r_1} + \lambda_2 \underline{r_2} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{bmatrix}$$

με

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \\ = \ & \lambda_1 (x_1 + y_1 + z_1) + \lambda_2 (x_2 + y_2 + z_2) \\ = \ & \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

και επομένως $\lambda_1 \underline{r_1} + \lambda_2 \underline{r_2} \in P$ για κάθε λ_1, λ_2. ■

Παράδειγμα 7-4

Αντίθετα με το προηγούμενο, το σύνολο

$$P = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} | x + y + z = 6 \} \ ,$$

που περιέχει τα σημεία ενός επιπέδου που δεν περνάει από την αρχή των αξόνων, δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ αφού το άθροισμα $\lambda_1 \cdot 6 + \lambda_2 \cdot 6$ (στο οποίο θα κατέληγε κανείς αντίστοιχα με πριν) δεν είναι για κάθε λ_1, λ_2 ίσο με 6.

Το γεγονός αυτό προκύπτει και πιο εύκολα, αν παρατηρήσουμε ότι το P δεν περιλαμβάνει το μηδενικό διάνυσμα (αφού δεν περνάει από την αρχή των αξόνων). Γενικά:

- Οι ευθείες, τα επίπεδα (ή τα υπερεπίπεδα διαφόρων διαστάσεων $\leq n$) του χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$, αν περνούν από την αρχή των αξόνων.

■

Παράδειγμα 7-5

Το σύνολο S των συμμετρικών $n \times n$ πινάκων είναι υπόχωρος του $\mathcal{M}_{nn}$. Αυτό επειδή αν $A,\ B \in S$ θα είναι:

$$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A$$

Δηλαδή οι $A + B$ και λA είναι κι αυτοί συμμετρικοί. ■

Αν έχουμε k διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ενός διανυσματικού χώρου V ένα άθροισμα της μορφής

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \ ,$$

με $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** των διανυσμάτων αυτών. Μπορούμε εύκολα να δημιουργούμε υποχώρους ενός διανυσματικού χώρου:

- Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των $v_1, v_2, \ldots, v_k$, είναι ένας υπόχωρος του V, ο οποίος λέμε ότι **παράγεται** από τα k αυτά διανύσματα ή αλλιώς ότι είναι το **γραμμικό ανάπτυγμά** τους. Συμβολίζεται $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ ή $span(v_1, v_2, \ldots, v_k)$.

Παράδειγμα 7-6

- Ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ παράγει μία ευθεία.
- Δύο μη συγγραμικά διανύσματα παράγουν ένα επίπεδο.
- Τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα παράγουν ολόκληρο τον $\mathbb{R}^3$.
- Τα μονώνυμα $1, x, x^2, x^3, x^4$ παράγουν τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{P}_4$ των πολυωνύμων βαθμού ≤ 4.

■

7.3 Γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων

Έστω ότι έχουμε k διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ενός διανυσματικού χώρου V:

- Λέμε ότι τα διανύσματα αυτά είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα**, αν η εξίσωση
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = 0_V \tag{7.1}$$

συνεπάγεται ότι

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0 \ .$$

Αυτό σημαίνει ότι *κανένα από αυτά τα διανύσματα δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων*.

- Αν η προηγούμενη εξίσωση (7.1) μπορεί να ισχύει και στην περίπτωση που ένα τουλάχιστον από τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ είναι διάφορο του 0 τότε ένα τουλάχιστον από τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων (πηγαίνοντάς το στο άλλο μέλος της ισότητας και διαιρώντας μετά με το λ_i του, αφού αυτό είναι μη μηδενικό) και λέμε ότι τα k διανύσματα είναι **γραμμικώς εξαρτημένα**.

Παράδειγμα 7-7

- 2 διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αν δεν είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου, δηλαδή αν δεν είναι συγγραμικά: Η (7.1) για 2 διανύσματα γίνεται

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_V \ .$$

  Στην περίπτωση της γραμμικής εξάρτησης ένας από τους δύο αριθμούς, έστω ο λ_1, είναι μη μηδενικός και προκύπτει ότι

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 \ .$$

- 3 διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αν δεν είναι συνεπίπεδα. Αν είναι γραμμικώς εξαρτημένα θα έχουμε, αντίστοιχα με πριν, μια σχέση όπως

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3 \ .$$

■

Στην περίπτωση που έχουμε διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^n$, για όποιο n, η εξίσωση (7.1) αντιστοιχεί σε ένα $n \times k$ ομογενές σύστημα (όπου οι άγνωστοι συμβολίζονται με λ_i, αντί για x_i). Επομένως

- τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αν το (7.1) έχει *μόνο την τετριμμένη λύση*.

Παράδειγμα 7-8

Τα 3 διανύσματα του $\mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αυτό επειδή είναι οι στήλες του πίνακα του 3×3 συστήματος (4.1), που το γράφουμε τώρα ως εξίσωση διανυσμάτων:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

Το σύστημα αυτό βρήκαμε ότι έχει μοναδική λύση. Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι το αντίστοιχο ομογενές σύστημα (η εξίσωση (7.1) για την περίπτωσή μας) έχει μόνο την τετριμμένη λύση. ■

Παράδειγμα 7-9

Τα 3 διανύσματα του $\mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Είναι οι στήλες του πίνακα του 3×3 συστήματος (4.3), που βρήκαμε ότι έχει άπειρες λύσεις και άρα άπειρες έχει και το αντίστοιχο ομογενές. (Βλέπουμε άλλωστε ότι το τρίτο διάνυσμα είναι το άθροισμα των άλλων δύο.) ■

Παράδειγμα 7-10

Από την επίλυση του 2×3 συστήματος (4.7) προκύπτει ότι τα 3 διανύσματα του $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένα. ■

Από τα προηγούμενα παραδείγματα που αναφέρονται σε τετραγωνικά συστήματα συμπεραίνουμε ότι:

- Ένα σύστημα $n \times n$ έχει *μοναδική λύση*, αν και μόνο αν οι στήλες του πίνακά του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι αν φέρουμε έναν πίνακα σε κλιμακωτή μορφή και κάποιες γραμμές του μηδενιστούν αυτό σημαίνει ότι αυτές οι γραμμές είναι, ως διανύσματα, γραμμικοί συνδυασμοί κάποιων από τις άλλες γραμμές. Έτσι έχουμε κι έναν άλλο τρόπο να ελέγχουμε τη γραμμική ανεξαρτησία κάποιων διανυσμάτων:

- Γράφουμε τα διανύσματα ως γραμμές ενός πίνακα και τον φέρνουμε σε κλιμακωτή μορφή με τη μέθοδο Gauss:
  - Αν δεν μηδενιστεί καμία γραμμή τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
  - Αν μηδενιστούν κάποιες γραμμές αυτό σημαίνει ότι γραμμικώς ανεξάρτητες είναι οι μη μηδενικές γραμμές που απέμειναν. Τα αντίστοιχα διανύσματα παράγουν τον ίδιο χώρο με τα αρχικά.

Παράδειγμα 7-11

Από την επίλυση του 3×3 συστήματος (4.1), επειδή καμία γραμμή δεν μηδενίστηκε στην κλιμακωτή μορφή του πίνακα, συμπεραίνουμε ότι τα 3 διανύσματα του $\mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

που αντιστοιχούν στις γραμμές του πίνακα, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. ■

Παράδειγμα 7-12

Από την επίλυση του 3×3 συστήματος (4.3), με τις άπειρες λύσεις, συμπεραίνουμε ότι τα 3 διανύσματα του $\mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix},$$

που αντιστοιχούν στις γραμμές του πίνακα, είναι γραμμικώς εξαρτημένα. ■

Παράδειγμα 7-13

Από την επίλυση του 2×3 συστήματος (4.7), επειδή καμία γραμμή δεν μηδενίστηκε στην κλιμακωτή μορφή του πίνακα, συμπεραίνουμε ότι τα 2 διανύσματα του $\mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

που αντιστοιχούν στις γραμμές του πίνακα, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. (Εδώ βέβαια, αφού τα διανύσματα είναι δύο, φαίνεται ότι δεν είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου.) ■

Ανάλογα με προηγουμένως συμπεραίνουμε ότι:

- Ένα σύστημα $n \times n$ έχει *μοναδική λύση*, αν και μόνο αν οι γραμμές του πίνακά του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

7.4 Βάση και διάσταση

Η γεωμετρική ερμηνεία των διανυσματικών χώρων $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ είναι ότι παριστάνουν μία ευθεία (με διάσταση 1), ένα επίπεδο (με διάσταση 2) και τον συνήθη τρισδιάστατο χώρο αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας την έννοια της βάσης ενός διανυσματικού χώρου μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της διάστασης για οποιονδήποτε χώρο $\mathbb{R}^n$ καθώς και για άλλου είδους χώρους.

Ένα σύνολο διανυσμάτων ενός χώρου V λέμε ότι είναι μία **βάση** του, αν τα διανύσματα

- είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και
- παράγουν τον χώρο αυτό.

Παράδειγμα 7-14

Το $\{\,[1 \quad 0]^T, [0 \quad 1]^T\,\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$, αφού τα δύο διανύσματα που περιέχει είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και για κάθε διάνυσμα $[\,a \quad b\,]^T$ του $\mathbb{R}^2$ ισχύει

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{7.3}$$

■

Η γεωμετρική ερμηνεία της (7.3) είναι ότι μας δίνει την ανάλυση του διανύσματος στους 2 άξονες που ορίζονται από τα διανύσματα της βάσης. Επειδή όμως 2 οποιαδήποτε γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ ορίζουν 2 άξονες, στους οποίους μπορεί να αναλυθεί το $[a \quad b]^T$, συμπεραίνουμε ότι η βάση του $\mathbb{R}^2$ δεν είναι μοναδική. Γενικά:

- Η βάση ενός διανυσματικού χώρου V δεν είναι μοναδική.
- Όλες οι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου V έχουν, όπως αποδεικνύεται, τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων, ο οποίος ονομάζεται **διάσταση** του χώρου αυτού και συμβολίζεται $dim\, V$.

Οι a, b είναι οι **συντεταγμένες** του διανύσματος στη δεδομένη βάση. Η βάση αυτή ονομάζεται κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. Γενικά, η **κανονική βάση** του $\mathbb{R}^n$ περιλαμβάνει τα n διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

και είναι $dim\, \mathbb{R}^n = n$.

Όταν έχουμε ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ οι συντεταγμένες του συνήθως αναφέρονται στην κανονική βάση. Σε άλλη βάση θα έχει *διαφορετικές συντεταγμένες*.

Παράδειγμα 7-15

Όπως φαίνεται από την (7.2), που ισχύει για

$$\lambda_1 = -\frac{4}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{10}{3}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{3}$$

(αφού η εξίσωση αυτή ισοδυναμεί με το σύστημα (4.1)), οι συντεταγμένες του διανύσματος

$$\underline{b} = [7 \quad 2 \quad 3]^T$$

στη βάση που αποτελούν τα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

είναι $-4/3$, $10/3$, $1/3$. Αν για κάποιο λόγο αποφασίσουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη βάση πρέπει να γράψουμε το διάνυσμα ως

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T .$$

(Το ότι τα διανύσματα (7.4) αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$ προκύπτει από την επίλυση του (4.1): α) Είδαμε ήδη ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. β) Ξέρουμε ότι το (4.1) θα είχε (μοναδική) λύση όποιο και αν ήταν το διάνυσμα των σταθερών όρων του, πράγμα που σημαίνει ότι τα διανύσματα αυτά παράγουν τον $\mathbb{R}^3$.) ■

Μπορούμε τώρα για ένα γραμμικό σύστημα $n \times n$ με *μοναδική λύση* να πούμε ότι:

- Οι στήλες του πίνακά του παράγουν τον $\mathbb{R}^n$ και αποτελούν μια βάση του.
- Οι γραμμές του πίνακά του παράγουν τον $\mathbb{R}^n$ και αποτελούν μια βάση του.

Παράδειγμα 7-16

Παραδείγματα άλλων χώρων:

- Οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  είναι βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{M}_{22}$ των πινάκων 2×2, για τον οποίο $dim\, \mathcal{M}_{22} = 4$. Είναι φανερό ότι οποιοσδήποτε 2×2 πίνακας μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των 4 αυτών πινάκων και άρα αυτοί παράγουν τον $\mathcal{M}_{22}$. Το ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι προκύπτει σχηματίζοντας την εξίσωση (7.1). Είναι μία εξίσωση πινάκων και αν εξισώσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία θα βρούμε ένα ομογενές σύστημα 4×4 που έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

- Το $\{1, x, x^2, x^3\}$ είναι βάση του $\mathcal{P}_3$, για τον οποίο $dim\, \mathcal{P}_3 = 4$.

■

Παράδειγμα 7-17

Η επίλυση του συστήματος

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 0\ , \end{array} \tag{7.5}$$

που είναι το ομογενές αντίστοιχο του (4.3), μας δίνει τη γενική λύση:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι άπειρες λύσεις του συστήματος ανήκουν σε έναν υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που έχει βάση το $\{\,[-1 \quad -1 \quad 1]^T\,\}$ και διάσταση ίση με 1. (Πρόκειται επομένως για μία ευθεία μέσα στον τρισδιάστατο χώρο, η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.) ■

Παράδειγμα 7-18

Η επίλυση του συστήματος

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & - & 10x_3 & = & 0 \\ 7x_1 & + & 14x_2 & + & 35x_3 & = & 0\ , \end{array} \tag{7.6}$$

που είναι το ομογενές αντίστοιχο του (4.4), μας δίνει τη γενική λύση:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι άπειρες λύσεις του συστήματος ανήκουν σε έναν υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που έχει βάση το $\{\,[-2 \quad 1 \quad 0]^T, [-5 \quad 0 \quad 1]^T\,\}$ και διάσταση ίση με 2. (Επίπεδο μέσα στον τρισδιάστατο χώρο, το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων.) ■

Σε έναν διανυσματικό χώρο V με $dim\, V = n$:

- Αν πάρουμε περισσότερα από n διανύσματα του V αυτά θα είναι σίγουρα γραμμικώς εξαρτημένα.
- Αν πάρουμε λιγότερα από n διανύσματα του V αυτά σίγουρα δεν παράγουν τον V.

Υπάρχουν και διανυσματικοί χώροι όπου μπορούμε να βρούμε σύνολα με οσαδήποτε διανύσματα που να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Τέτοιοι είναι οι χώροι $\mathcal{P}$ και $\mathcal{F}$. Είναι χώροι *άπειρης διάστασης*.

Αν έχουμε έναν αριθμό από διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου και θέλουμε να βρούμε μία βάση και τη διάσταση του υποχώρου που παράγουν μπορούμε να σχηματίσουμε έναν πίνακα με αυτά ως γραμμές και εφαρμόζοντας ΣΠΓ να πάρουμε έναν ισοδύναμο κλιμακωτό πίνακα. Τότε:

- Οι (ενδεχομένως λιγότερες) μη μηδενικές γραμμές, που θα μείνουν, θα αντιστοιχούν σε γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα που παράγουν τον ίδιο υπόχωρο και επομένως αποτελούν μια βάση του.

- Ο αριθμός τους θα δίνει τη διάσταση του υποχώρου.

Παράδειγμα 7-19

Από την επίλυση του συστήματος (4.3) προκύπτει ότι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, που παράγεται από τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix},$$

έχει μία βάση που αποτελείται από τα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

και η διάστασή του είναι ίση με 2. (Επίπεδο μέσα στον τρισδιάστατο χώρο, το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων.) ■

7.5 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Σε έναν χώρο $\mathbb{R}^n$, εκτός από τις δύο πράξεις που έχει ως διανυσματικός χώρος, μπορεί να οριστεί και το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων του, το οποίο είναι ένας πραγματικός αριθμός:

$$\begin{aligned} \underline{x} \cdot \underline{y} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= \underline{x}^T \underline{y} \end{aligned} \tag{7.7}$$

(Αυτός ο ορισμός είναι η γενίκευση του εσωτερικού γινομένου των συνήθων διανυσμάτων σε 2 και 3 διαστάσεις.)

Γενικά, **εσωτερικό γινόμενο** σε έναν διανυσματικό χώρο V είναι μια πράξη η οποία σε κάθε ζεύγος διανυσμάτων u, v αντιστοιχίζει έναν πραγματικό αριθμό $\langle u, v\rangle$ και ισχύουν (για οποιαδήποτε διανύσματα u, v, w του V και οποιονδήποτε αριθμό λ του $\mathbb{R}$) τα επόμενα:

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
2. $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$
3. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$
4. $\langle u, u\rangle \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $u = 0_V$.

Αν υπάρχει αυτή η πράξη λέμε ότι ο V είναι ένας **χώρος με εσωτερικό γινόμενο**.

Παράδειγμα 7-20

Εκτός από το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο (7.7), στον $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να ορίσουμε και εσωτερικά γινόμενα με **βάρη**:

$$\langle x, y\rangle = w_1 x_1 y_1 + w_2 x_2 y_2 + \ldots + w_n x_n y_n \tag{7.8}$$

Τα βάρη w_i πρέπει να είναι θετικοί αριθμοί. Τότε μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι απαιτούμενες 4 ιδιότητες του ορισμού ενός εσωτερικού γινομένου. ■

Παράδειγμα 7-21

Στον χώρο των πολυωνύμων $\mathcal{P}_3$, αν $p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3$ και $q(x) =$

$q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3$, μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 \tag{7.9}$$

■

Παράδειγμα 7-22

Στο διανυσματικό χώρο $\mathcal{C}_{[a,b]}$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$, με τις δύο βασικές πράξεις όπως στον $\mathcal{F}$, ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \tag{7.10}$$

(Έχουμε ολοκλήρωμα αντί για άθροισμα, επειδή ο χώρος είναι άπειρης διάστασης.) ■

Σε έναν χώρο V με εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να γενικεύσουμε τις έννοιες του μήκους ενός διανύσματος, της απόστασης και της ορθογωνιότητας, που γνωρίζουμε για το επίπεδο και τον τρισδιάστατο χώρο:

- Το **μήκος** ή **μέτρο** ενός διανύσματος v είναι

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}\ . \tag{7.11}$$

- Η **απόσταση** μεταξύ δύο διανυσμάτων u και v είναι

$$d(u, v) = ||u - v||\ . \tag{7.12}$$

- Δύο διανύσματα u και v είναι **ορθογώνια**, αν $\langle u, v \rangle = 0$.

Παράδειγμα 7-23

Για τις συναρτήσεις του $\mathcal{C}_{[0,1]}$ $f(x) = x$ και $g(x) = 4x^2 - 3x$ έχουμε:

- $$\langle f, f \rangle = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

  Επομένως $||f|| = 1/\sqrt{3}$.

- $$(f - g)(x) = -4x^2 + 4x$$

$$\begin{aligned}
\langle f-g, f-g\rangle &= \int_0^1 (-4x^2+4x)^2\,dx \\
&= 16\int_0^1 (x^4-2x^3+x^2)\,dx \\
&= 16\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\
&= 16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

Επομένως $d(f,g) = ||f-g|| = \sqrt{8/15}$.

•

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_0^1 x(4x^2-3x)\,dx \\
&= \int_0^1 (4x^3-3x^2)\,dx \\
&= [x^4-x^3]_0^1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Επομένως οι f και g είναι ορθογώνιες.

■

7.6 Χώροι σχετιζόμενοι με πίνακα

Οι ακόλουθοι διανυσματικοί χώροι σχετίζονται με έναν $m \times n$ πίνακα A:

- Ο **χώρος γραμμών** $\mathcal{R}(A)$ του πίνακα: Είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τις γραμμές του πίνακα ως διανύσματα.
- Ο **χώρος στηλών** $\mathcal{C}(A)$ του πίνακα: Είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τις στήλες του πίνακα ως διανύσματα.
- Ο **μηδενοχώρος** $\mathcal{N}(A)$ του πίνακα: Είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει τις λύσεις του ομογενούς συστήματος $A\underline{x} = \underline{0}$.

Τα επόμενα έχουν ήδη αναφερθεί ή προκύπτουν εύκολα:

- Ένα σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$ είναι συμβιβαστό, δηλαδή δεν είναι αδύνατο, αν το διάνυσμα $\underline{b}$ ανήκει στο χώρο στηλών του A.

- Οι ΣΠΓ σε έναν πίνακα A δεν αλλάζουν τον χώρο γραμμών ούτε τον μηδενοχώρο του.

- Αν έχουμε τον ισοδύναμο κλιμακωτό πίνακα οι μη μηδενικές γραμμές του αποτελούν μία βάση του χώρου γραμμών. Ο αριθμός τους, δηλαδή η τάξη του A, είναι ίσος με τη διάσταση του $\mathcal{R}(A)$.

- Ο αριθμός των ελεύθερων παραμέτρων του ομογενούς συστήματος $A\underline{x} = \underline{0}$ είναι ίσος με τη διάσταση του $\mathcal{N}(A)$. Τώρα η σχέση (4.8) μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$dim\,\mathcal{R}(A) + dim\,\mathcal{N}(A) = n \tag{7.13}$$

  Αν γράψουμε τη γενική λύση του $A\underline{x} = \underline{0}$ ως έναν γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων με συντελεστές τις ελεύθερες παραμέτρους τα διανύσματα αυτά αποτελούν μια βάση του $\mathcal{N}(A)$.

- Οι υπόχωροι $\mathcal{R}(A)$ και $\mathcal{N}(A)$ είναι ο ένας το **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του άλλου στον $\mathbb{R}^n$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του ενός είναι ορθογώνιο σε κάθε διάνυσμα του άλλου.

Επιπλέον ισχύουν τα εξής:

- Σε κάθε πίνακα η διάσταση του χώρου στηλών είναι ίση με τη διάσταση του χώρου γραμμών:

$$dim\,\mathcal{R}(A) = dim\,\mathcal{C}(A) = rank(A) \tag{7.14}$$

- Οι ΣΠΓ αλλάζουν τον χώρο στηλών ενός πίνακα. Ωστόσο, αν έχουμε τον ισοδύναμο κλιμακωτό πίνακα και πάρουμε τις στήλες που περιέχουν τους οδηγούς τότε οι *αντίστοιχες στήλες του αρχικού πίνακα A αποτελούν μία βάση του $\mathcal{C}(A)$*.

- Εναλλακτικά, μπορούμε να πάρουμε ως βάση του χώρου στηλών του A μια βάση του χώρου γραμμών του A^T.

Παράδειγμα 7-24

Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

έχουμε τους γραμμοϊσοδύναμους:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή κι επομένως:

- Μία βάση του $\mathcal{R}(A)$ αποτελείται από τα διανύσματα

  $$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  και $dim\,\mathcal{R}(A) = 3$.

- Οδηγούς περιέχουν η 1η, η 2η και η 4η στήλη και άρα οι αντίστοιχες στήλες του A, τα διανύσματα

  $$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

  αποτελούν μία βάση του $\mathcal{C}(A)$ και $dim\,\mathcal{C}(A) = 3$.

- Για την επίλυση του ομογενούς συστήματος $A\underline{x} = \underline{0}$ παρατηρούμε από το ισοδύναμο σύστημα που αντιστοιχεί στον κλιμακωτό πίνακα ότι η x_3 θα είναι ελεύθερη παράμετρος (η μόνη). Και θα έχουμε από την 3η εξίσωση:

  $$x_4 = 0$$

  Από την 2η:

  $$x_2 = -x_3$$

Από την 1η:

$$x_1 - 3x_3 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \; x_1 = 2x_3$$

Η γενική λύση συνεπώς είναι:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Συμπεραίνουμε ότι μία βάση του $\mathcal{N}(A)$ είναι το

$$\{\, [\,2 \quad -1 \quad 1 \quad 0\,]^T \,\}$$

και $dim\,\mathcal{N}(A) = 1$.

■

Κεφάλαιο 8

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

8.1 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πίνακα

Έστω ένας $n \times n$ πίνακας A. Αν πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα $\underline{x}$ με τον πίνακα αυτόν θα πάρουμε το γινόμενο $A\underline{x}$, το οποίο θα είναι, στη γενική περίπτωση, ένα διάνυσμα με διαφορετική διεύθυνση από το $\underline{x}$. Αν όμως συμβεί (για μη μηδενικό $\underline{x}$) να είναι

$$A\underline{x} = \lambda\underline{x} \tag{8.1}$$

λέμε ότι το $\underline{x}$ είναι **ιδιοδιάνυσμα** του A με **ιδιοτιμή** λ.

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα γράφουμε την (8.1) ως $A\underline{x} = \lambda I_n \underline{x}$, που ισοδυναμεί με την

$$(A - \lambda I_n)\underline{x} = \underline{0} \ . \tag{8.2}$$

Έχουμε εδώ ένα ομογενές σύστημα και, αφού θέλουμε να είναι $\underline{x} \neq \underline{0}$ (επειδή μας ενδιαφέρουν οι λύσεις οι διαφορετικές από την τετριμμένη), θα πρέπει να έχουμε:

$$|A - \lambda I_n| = 0 \tag{8.3}$$

Αυτή είναι η **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα A. Το αριστερό μέλος της είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς λ, το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A. Επομένως,

- οι ιδιοτιμές ενός $n \times n$ πίνακα A είναι οι n λύσεις της χαρακτηριστικής του εξίσωσης (8.3) (ή, αλλιώς, οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του).

Έχοντας βρει τις ιδιοτιμές τις αντικαθιστούμε μία μία στην (8.2) και έχουμε κάθε φορά ένα ομογενές σύστημα με άπειρες λύσεις, που εξαρτώνται από μία ή περισσότερες παραμέτρους. Έτσι,

- τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μία συγκεκριμένη ιδιοτιμή λ δίνονται από τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος (8.2).

Συχνά μας ενδιαφέρει να πάρουμε ένα μόνο από αυτά τα άπειρα ιδιοδιανύσματα. Παίρνουμε συνήθως το απλούστερο (επιλέγοντας κατάλληλες τιμές των παραμέτρων) και λέμε ότι είναι *το* ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Το ότι σε μια ιδιοτιμή αντιστοιχούν άπειρα ιδιοδιανύσματα φαίνεται από την αρχή στην (8.1), αφού αν το $\underline{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα τέτοιο θα είναι προφανώς και κάθε πολλαπλάσιό του. Επίσης αν δύο ιδιοδιανύσματα (γραμμικώς ανεξάρτητα) αντιστοιχούν σε μία ιδιοτιμή λ τότε και κάθε γραμμικός συνδυασμός τους θα είναι ιδιοδιάνυσμα με την ίδια ιδιοτιμή. Αυτό σημαίνει ότι *τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μία συγκεκριμένη ιδιοτιμή* λ *αποτελούν έναν υπόχωρο του* $\mathbb{R}^n$, τον λεγόμενο **ιδιοχώρο** της λ.

Από τις n λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης μπορεί κάποιες ή και όλες να μην είναι πραγματικές. Επομένως *ενδέχεται ένας πραγματικός πίνακας να έχει μιγαδικές ιδιοτιμές και κατά συνέπεια μιγαδικά ιδιοδιανύσματα.*

Παράδειγμα 8-1

Για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_2| &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-4)(\lambda-1)+2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 2\lambda + 6 \\ &= \lambda(\lambda-3) - 2(\lambda-3) \\ &= (\lambda-3)(\lambda-2) \end{aligned}$$

Ιδιοτιμές του A είναι επομένως οι

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 3 \ .$$

Υπολογισμός ιδιοδιανυσμάτων:

- Για την $\lambda_1 = 2$ θα λύσουμε το ομογενές σύστημα $(A - 2I_2)\underline{x} = \underline{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4-2 & -1 & 0 \\ 2 & 1-2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Το x_2 θα είναι παράμετρος και από την πρώτη εξίσωση του ισοδύναμου συστήματος παίρνουμε

$$2x_1 - x_2 = 0 \ \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

και τη γενική λύση

$$\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] = x_2 \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 1 \end{array}\right] .$$

Επιλέγοντας την παράμετρο ίση με 2 παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα:

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array}\right]^T$$

- Για την $\lambda_2 = 3$ θα λύσουμε το ομογενές σύστημα $(A - 3I_2)\underline{x} = \underline{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4-3 & -1 & 0 \\ 2 & 1-3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Το x_2 θα είναι παράμετρος και παίρνουμε

$$x_1 - x_2 = 0 \ \Rightarrow x_1 = x_2$$

και τη γενική λύση

$$\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] = x_2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right] .$$

Επιλέγοντας την παράμετρο ίση με 1 παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα:

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right]^T$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε:

$$\left[\begin{array}{cc} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array}\right] = 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

■

Παράδειγμα 8-2

Για τον τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} |B - \lambda I_2| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)^2 - 3 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 1 \end{aligned}$$

Ρίζες αυτού του πολυωνύμου και ιδιοτιμές του B είναι οι

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 2 - \sqrt{3}\ .$$

Υπολογισμός ιδιοδιανυσμάτων:

- Για την $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$ θα λύσουμε το ομογενές σύστημα $[A - (2+\sqrt{3})I_2]\,\underline{x} = \underline{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -\sqrt{3} & 3 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -\sqrt{3} & 3 & 0 \\ -\sqrt{3} & 3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -\sqrt{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Το x_2 θα είναι παράμετρος και παίρνουμε

$$-\sqrt{3}x_1 + 3x_2 = 0 \ \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}x_2$$

και τη γενική λύση

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}\ .$$

Για την παράμετρο ίση με 1 παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}^T$$

- Για την $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$ θα λύσουμε το ομογενές σύστημα $[A - (2-\sqrt{3})I_2]\,\underline{x} = \underline{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{3} & 3 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{3} & 3 & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Το x_2 θα είναι παράμετρος και παίρνουμε

$$\sqrt{3}x_1 + 3x_2 = 0 \;\Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}x_2$$

και τη γενική λύση

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Για την παράμετρο ίση με 1 παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}^T$$

■

8.2 Όμοιοι πίνακες

Λέμε ότι ο $n \times n$ πίνακας A είναι **όμοιος** με έναν $n \times n$ πίνακα B και συμβολίζουμε $A \sim B$, αν υπάρχει ένας αντιστρεπτός $n \times n$ πίνακας P τέτοιος ώστε

$$P^{-1}AP = B$$

Η ομοιότητα είναι μία σχέση ισοδυναμίας, επειδή αν οι A, B και C είναι πίνακες $n \times n$ τότε:

1. $A \sim A$.
2. Αν $A \sim B$ τότε και $B \sim A$.
3. Αν $A \sim B$ και $B \sim C$ τότε και $A \sim C$.

Αν δύο πίνακες A και B είναι όμοιοι τότε έχουν πολλά κοινά:

- $|A| = |B|$ (επομένως είναι αντιστρεπτοί ή και οι δύο ή κανένας),
- $rank(A) = rank(B)$,
- $tr(A) = tr(B)$,
- έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές,

- $A^k \sim B^k$, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k (και αν οι πίνακες είναι αντιστρεπτοί για κάθε ακέραιο k).

(Στην ενότητα 1.1.2 το σύμβολο $\sim$ αναφερόταν στη γενική περίπτωση μιας σχέσης ισοδυναμίας, στην ενότητα 4.3 συμβόλιζε την γραμμοϊσοδυναμία πινάκων, ενώ εδώ συμβολίζει την ομοιότητα πινάκων.)

8.3 Διαγωνιοποίηση πίνακα

Οι διαγώνιοι πίνακες είναι οι πιο βολικοί στις πράξεις. Έτσι, μας ενδιαφέρει αν ένας πίνακας είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα. Λέμε, στην περίπτωση αυτή, ότι ο πίνακάς μας είναι **διαγωνιοποιήσιμος**.

Για έναν $n \times n$ πίνακα A υπάρχει μια αναγκαία και ικανή συνθήκη:

- Ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Τότε θα είναι

$$P^{-1}AP = D \ , \tag{8.4}$$

όπου:

- P είναι ο $n \times n$ πίνακας που έχει ως στήλες τα n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A.
- D είναι ο $n \times n$ διαγώνιος πίνακας που περιέχει τις n ιδιοτιμές του A (με τη σειρά που αντιστοιχεί σε αυτήν που έχουν τα ιδιοδιανύσματα στον P).

Ο P δεν είναι μοναδικός αλλά είναι σίγουρα αντιστρεπτός, αφού οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Από την (8.4), λόγω των ιδιοτήτων των όμοιων πινάκων, γίνονται φανερά για διαγωνιοποιήσιμους πίνακες τα επόμενα, που ισχύουν για *κάθε τετραγωνικό πίνακα*:

- η ορίζουσα είναι ίση με το γινόμενο των ιδιοτιμών,
- το ίχνος είναι ίσο με το άθροισμα των ιδιοτιμών.

Έχουμε τώρα ακόμα ένα κριτήριο αντιστρεπτότητας ενός πίνακα:

- Ένας πίνακας είναι αντιστρεπτός, αν δεν έχει καμία μηδενική ιδιοτιμή.

Παράδειγμα 8-3

Από τα ιδιοδιανύσματα που υπολογίσαμε προκύπτει ότι ο πίνακας που διαγωνιοποιεί τον

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

του πρώτου παραδείγματος είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Ο αντίστροφός του είναι:

$$P^{-1} = \frac{1}{1-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι παίρνουμε πράγματι έναν διαγώνιο πίνακα που περιέχει τις ιδιοτιμές του A με τη σειρά που αντιστοιχεί στις στήλες του P. ■

Παράδειγμα 8-4

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Θα βρούμε πρώτα τις ιδιοτιμές του:

$$\begin{aligned}
|A-\lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2-1)+(1+\lambda) \\
&= (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1)+(1+\lambda) \\
&= (1+\lambda)[-(1-\lambda)^2+1] \\
&= (1+\lambda)(-\lambda^2+2\lambda) \\
&= (1+\lambda)\lambda(2-\lambda)
\end{aligned}$$

Παίρνουμε επομένως τις ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = -1 \ , \quad \lambda_2 = 0 \ , \quad \lambda_3 = 2 \ .$$

(Ήταν αναμενόμενο να βρούμε μηδενική ιδιοτιμή, αφού ο A έχει δύο γραμμές ίδιες και άρα μηδενική ορίζουσα.)

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα.

- Για την $\lambda_1 = -1$ λύνουμε το ομογενές σύστημα $(A+I_3)\underline{x} = \underline{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Το x_3 θα είναι παράμετρος και από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$x_2 + x_3 = 0 \ \Rightarrow x_2 = -x_3$$

και αντικαθιστούμε το x_2 στην πρώτη:

$$x_1 - x_3 + x_3 = 0 \ \Rightarrow x_1 = 0$$

Η γενική λύση είναι η

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επιλέγοντας την παράμετρο ίση με 1 παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

- Για την $\lambda_2 = 0$ λύνουμε το ομογενές σύστημα $A\underline{x} = \underline{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Το x_2 θα είναι παράμετρος. Από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$x_3 = 0$$

και αντικαθιστώντάς το στην πρώτη:

$$x_1 + x_2 = 0 \;\Rightarrow x_1 = -x_2$$

Η γενική λύση είναι η

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Επιλέγοντας την παράμετρο ίση με 1 παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

- Για την $\lambda_3 = 2$ λύνουμε το ομογενές σύστημα $(A - 2I_3)\underline{x} = \underline{0}$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Το x_3 θα είναι παράμετρος. Από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$-2x_2 + x_3 = 0 \ \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_3$$

και αντικαθιστούμε το x_2 στην πρώτη:

$$-x_1 + \frac{1}{2}x_3 + x_3 = 0 \ \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}x_3$$

Η γενική λύση είναι η

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Επιλέγοντας την παράμετρο ίση με 2 παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

Με τα 3 ιδιοδιανύσματα σχηματίζουμε τον P που διαγωνιοποιεί τον A:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστοιχος διαγώνιος είναι ο

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Αντί για την (8.4) είναι πιο εύκολο να επαληθεύσουμε την ισοδύναμη σχέση:

$$AP = PD \tag{8.5}$$

Έχουμε:

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή η (8.5) ισχύει. ■

8.4 Ιδιοτιμές και διαγωνιοποίηση

Όπως αποδεικνύεται *τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα*. Επομένως, λόγω της αναγκαίας και ικανής συνθήκης διαγωνιοποίησης, είμαστε σίγουροι ότι:

- Αν ένας $n \times n$ πίνακας έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Τέτοιους πίνακες είχαμε στα μέχρι τώρα παραδείγματα.

Αν υπάρχουν πολλαπλές ιδιοτιμές πάλι δεν αποκλείεται ο πίνακας να είναι διαγωνιοποιήσιμος. Θα πρέπει, για να συμβαίνει αυτό, αν μία ιδιοτιμή είναι, για παράδειγμα, τριπλή να έχει τρία ιδιοδιανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα. Θα πρέπει, γενικά,

- η **(αλγεβρική) πολλαπλότητα** κάθε ιδιοτιμής του πίνακα να είναι ίση με τη **γεωμετρική πολλαπλότητά** της. (Η γεωμετρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής είναι ίση με τη διάσταση του ιδιοχώρου της, δηλαδή με τον μέγιστο αριθμό ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που μπορεί να δώσει.) Διαφορετικά, ο πίνακας είναι μη διαγωνιοποιήσιμος.

(Ισχύει ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα μίας ιδιοτιμής μπορεί το πολύ να είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητά της.)

Παράδειγμα 8-5

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
|A - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda - 1 & 1+\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-\lambda - 1) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - (1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda+1)(\lambda^2 - 1) - (\lambda+1)(-\lambda-1) \\
&= -(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-1) + (\lambda+1)^2 \\
&= (\lambda+1)^2[-(\lambda-1)+1] \\
&= (\lambda+1)^2(-\lambda+2)
\end{aligned}$$

Έχουμε τώρα μία ιδιοτιμή διπλή:

$$\lambda_1 = -1 \ , \quad \lambda_2 = -1 \ , \quad \lambda_3 = 2 \ .$$

Για να δούμε αν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος πρέπει να ελέγξουμε αν η διπλή ιδιοτιμή $-1 = \lambda_1 = \lambda_2$ μας δίνει 2 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Έχουμε να λύσουμε το ομογενές σύστημα $(A + I_3)\underline{x} = \underline{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Βλέπουμε ότι θα έχουμε 2 παραμέτρους, τις x_2 και x_3, και από την πρώτη εξίσωση

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3 \ .$$

Η γενική λύση επομένως είναι

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Ο ιδιοχώρος της διπλής ιδιοτιμής -1 έχει διάσταση 2, οπότε μπορούμε να πάρουμε 2 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και άρα ο πίνακάς μας είναι διαγωνιοποιήσιμος. Επιλέγοντας τις παραμέτρους $x_2 = 1$ και $x_3 = 0$ παίρνουμε πρώτο ιδιοδιάνυσμα το

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

και για $x_2 = 0$ και $x_3 = 1$ παίρνουμε δεύτερο ιδιοδιάνυσμα το

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T .$$

Πρέπει τώρα να υπολογίσουμε και το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $\lambda_3 = 2$, λύνοντας το ομογενές σύστημα $(A - 2I_3)\underline{x} = \underline{0}$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Το x_3 θα είναι παράμετρος. Από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$-x_2 + x_3 = 0 \ \Rightarrow x_2 = x_3$$

και αντικαθιστώντας το στην πρώτη:

$$x_1 - 2x_3 + x_3 = 0 \ \Rightarrow x_1 = x_3$$

Η γενική λύση είναι η

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Επιλέγοντας την παράμετρο ίση με 1 παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Με τα 3 ιδιοδιανύσματα, που έχουμε βρει, σχηματίζουμε τον P:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστοιχος διαγώνιος είναι ο

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Επαληθεύουμε ότι ο P διαγωνιοποιεί τον A, διαπιστώνοντας ότι ισχύει η σχέση (8.5):

$$AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

■

Παράδειγμα 8-6

Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

έχουμε:

$$\begin{aligned}
|A-\lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 & -8 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (6-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -2-\lambda & 0 \end{vmatrix} \\
&= (6-\lambda)(\lambda+2)(\lambda+3) - 8(\lambda+2) \\
&= -(\lambda+2)[(\lambda-6)(\lambda+3)+8] \\
&= -(\lambda+2)(\lambda^2-3\lambda-10) \\
&= -(\lambda+2)(\lambda+2)(\lambda-5)
\end{aligned}$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές μας είναι

$$\lambda_1 = -2\ , \quad \lambda_2 = -2\ , \quad \lambda_3 = 5\ .$$

Αφού η ιδιοτιμή -2 είναι διπλή πρέπει να ελέγξουμε την γεωμετρική της πολλαπλότητα, δηλαδή αν μας δίνει ή όχι 2 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Για το ομογενές σύστημα $(A+2I_3)\underline{x} = \underline{0}$ έχουμε :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Το x_3 θα είναι ελεύθερη παράμετρος. Με μία μόνο παράμετρο η διάσταση του ιδιοχώρου της ιδιοτιμής -2 θα είναι ίση με 1, οπότε δεν υπάρχουν 2 ιδιοδιανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα. Συμπεραίνουμε ότι ο A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος. ∎

8.5 Υπολογισμός δυνάμεων πινάκων

Όταν ένας πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος απλουστεύεται ο υπολογισμός δυνάμεών του. Αυτό γιατί, αν $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$, θα είναι και

$$A^k\underline{x} = \lambda^k\underline{x}\ . \tag{8.6}$$

Ο A^k, δηλαδή, θα έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον A με ιδιοτιμές τις αντίστοιχες του A υψωμένες στη δύναμη k. Επομένως, αν $P^{-1}AP = D$, θα είναι και

$$P^{-1}A^kP = D^k \ , \tag{8.7}$$

οπότε

$$A^k = PD^kP^{-1} \ . \tag{8.8}$$

Παράδειγμα 8-7

Θα υπολογίσουμε την έκτη δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} ,$$

για τον οποίο στο παράδειγμα 7-3 είχαμε:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Θα είναι:

$$\begin{aligned} A^6 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^6 & 0 \\ 0 & 3^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2^6 & 2^6 \\ 2 \cdot 3^6 & -3^6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(3^6 - 2^5) & 2^6 - 3^6 \\ 2(3^6 - 2^6) & 2^7 - 3^6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1394 & -665 \\ 1330 & -601 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■