# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

## ΕΝΟΤΗΤΑ: Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα (1)


ΙΟΝΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Βλάμος Παναγιώτης



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Ιονίου Πανεπιστημίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

## Εισαγωγή

**Απαλοιφή Gauss με α) μερική οδήγηση, και β) με ολική οδήγηση.**

**α) *μερική οδήγηση* Στο πρώτο στάδιο της απαλοιφής ςξετάζεται η πρώτη στήλη για την εύρεση του μεγαλύτερου (ως προς το μέγεθος) στοιχείου, και τοποθετείτε ως το πρώτο “οδηγό” στοιχείο με αμοιβαία ανταλλαγή των αντιστοίχω εξισώσεων. Στο δεύτερο στάδιο επαναλάμβανεται η διαδικασία για τη 2η στήλη κ.ο.κ. Δηλ:**

**αν j ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο** $|a_{jk}^{(k)}| = max|a_{ik}^{(k)}|,\ k \leq i \leq n$

**τότε αντάλλαξε τις γραμμές k, j.**

# Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

## Εισαγωγή

**Απαλοιφή Gauss με α) μερική οδήγηση, και β) με ολική οδήγηση.**

**β) *ολική οδήγηση* Εξετάζουμε τον πίνακα A (δλδ τους συντελεστές των αγνώστων) ως προς την εύρεση του απολύτως μεγαλυτέρου στοιχείου, και το τοποθετούμε ως το *πρώτο οδηγό στοιχείο*. Είναι εύκολα αντιληπτό ότι αυτό (γενικά) απαιτεί αναδιάταξη των θέσεων των όρων ή/και ανταλλαγή εξισώσεων. Δηλ.:**

**Αν l, m οι μικρότεροι ακέραιοι για τους οποίους:**

$$|a_{lm}^{(k)}| = max|a_{ij}^{(k)}|, \ k \leq i, \ j \leq n$$

**τότε αντάλλαξε τις γραμμές k. l και τις στήλες k,m.**

**Παράδειγμα: απαλοιφής Gauss με α) μερική οδήγηση, και β) με ολική οδήγηση.**

**Έστω το σύστημα:**

$$\begin{aligned} 10x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

**Το πρώτο “οδηγό” στοιχείο είναι το 0, άρα πρέπει να προβούμε σε οδήγηση.**

**α) Εξετάζοντας την πρώτη στήλη βρίσκουμε το “2”->ανταλλάσουμε την 1η με την 3η εξίσωση, δλδ:**

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ 10x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

**Παράδειγμα: απαλοιφής Gauss με α) μερική οδήγηση, και β) με ολική οδήγηση.**

**Πολ/με την 1η με (-1/2) και την προσθέτουμε στη 2η, και προκύπτει:**

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 5 \\ +x_2 - \frac{3}{2}x_3 &= \tfrac{7}{2} \\ 10x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

**Στη συνέχεια εξετάζουμε την 2η στήλη, και παρατηρούμε ότι το απολύτως μεγαλύτερο στοιχείο είναι το “10” -> ανταλλάσουμε την 2η με την 3η, και:**

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 5 \\ 10x_2 + x_3 &= 2 \\ +x_2 - \frac{3}{2}x_3 &= \tfrac{7}{2} \end{aligned}$$

**Παράδειγμα: απαλοιφής Gauss με α) μερική οδήγηση, και β) με ολική οδήγηση.**

**Πολ/με την 2η με (-1/10) και την προσθέτουμε στη 3η, και προκύπτει:**

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 \quad &= 5 \\ 10x_2 + x_3 \quad &= 2 \\ -\frac{8}{5}x_3 \quad &= \tfrac{33}{10} \end{aligned}$$

**και τελικά {x1,x2,x3}={2.71875, 0.40625, -2.0625}.**

**Παράδειγμα: απαλοιφής Gauss με α) μερική οδήγηση, και β) με ολική οδήγηση.**

**β) Εξετάζουμε τον πίνακα των συντελεστών:** $\begin{bmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

**Ο μεγαλύτερος αριθμός 10, ανταλλάσουμε την 1η με την 2η στήλη, και προκύπτει ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων:** $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

**σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα και:** $\left[\begin{array}{rrr|r} 10 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$

## Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

**Παράδειγμα: απαλοιφής Gauss με α) μερική οδήγηση, και β) με ολική οδήγηση.**

**Πολ/με την 1η με (i) (-3/10) και την προσθέτουμε στην 2η, και (ii) πολ/με την 1η με (-2/5) και την προσθέτουμε στην 3η, δλδ:**

$$\left[\begin{array}{ccr|c} 10 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{10} & \frac{27}{5} \\ 0 & 2 & \frac{3}{5} & \frac{21}{5} \end{array}\right]$$

**αντιμεταθέτουμε τις 2 τελευταίες γραμμές:**

$$\left[\begin{array}{ccr|c} 10 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & \frac{3}{5} & \frac{21}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{10} & \frac{27}{5} \end{array}\right]$$

**πολ/με την 2 η γραμμή με (-1/2) και την προσθέτουμε στην 3η γραμμή, και:**

$$\left[\begin{array}{ccr|c} 10 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & \frac{3}{5} & \frac{21}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{10} & \frac{33}{5} \end{array}\right]$$

**Οπότε {x1,x2,x3}={2.71875,0.40625,-2.0625}**

**Λύσεις από α) {x1,x2,x3}={2.71875, 0.40625, -2.0625}.**

# Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

## Εισαγωγή

**Μέθοδος τριγωνοποίσης ή LU decomposition method**

**Σε αυτή την μέθοδο ο πίνακας A, των συντελεστών των αγνώστων παραγοντοποιείται σε γινόμενο ενός κάτω (L) και ενός άνω (U) τριγωνικού πίνακα, δλδ: A = L U, με**

$$\mathrm{L}=\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \dots & \ell_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{U}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

# Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

## Εισαγωγή

**Μέθοδος τριγωνοποίσης ή LU decomposition method**

**Πραγματοποιώντας τον πολ/μο L U σχηματίζονται τα:**

$$\begin{array}{l} \ell_{i1}u_{1j} + \ell_{i2}u_{2j} + \ldots + \ell_{in}u_{nj} = a_{ij},\ j = 1(1)n, \\ \ell_{ij} = 0,\ j > i,\ \vee\ u_{ij} = 0, i > j \end{array}$$

**ο συνολικός αριθμός αγνώστων είναι n^2+n. Οπότε υπάρχουν n παραμετρικές οικογένειες λύσεων. Για να βρούμε μία αρκεί να θέσουμε**

$$\ell_{ii} = 1\ \wedge\ u_{ii} = 1, i = 1(1)n$$

**Επιλέγουμε τη 2η περίπτωση, και χωρίς να επηρεάζεται η γενικότητα:**

$$\left.\begin{array}{r} \ell_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj},\ i \geq j \\ u_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj})/l_{ii},\ i < j \\ u_{ii} = 1 \end{array}\right\}$$

# Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

## Εισαγωγή

**Η 1η στήλη του L είναι ίση με την 1η στήλη του A, και αντίστοιχα η 1η γραμμή του U. Οπότε:**

$$\left.\begin{aligned} \ell_{i1} = a_{i1},\ i = 1(1)n \\ u_{ij} = a_{ij}/l_{11},\ j = 2(1)n \\ u_{ii} = 1 \end{aligned}\right\}$$

**για την 2η στήλη και γραμμή:**

$$\left.\begin{aligned} \ell_{i2} = a_{i2} - \ell_{i1}u_{12},\ i = 2(1)n \\ u_{2j} = (a_{2j} - \ell_{21}u_{1j})/l_{22},\ j = 3(1)n \end{aligned}\right\}$$

**για τις υπόλοιπες στήλες του L και γραμμές του U,**

$$\ell_{i1}, u_{1j}, \ell_{i2}, u_{2j}, \ell_{i\ n-1}, u_{n-1\ j}, \ell_{nn}, u_{nn}$$

**Έτσι μπορούμε να γράψουμε: Lux=b και ισοδύναμα Ux=z, Lz=b. Τα z, x προκύπτουν από τις σχέσεις:** $z = L^{-1}b \vee x = U^{-1}z,\ A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

## Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

### Παράδειγμα

**Να λυθεί το σύστημα:**

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

**Σχηματίζουμε τον A** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ **και στη συνέχεια τους L, U:**

$$\mathrm{L}=\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{U}=\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**πολ/ντας την 1η, 2η και 3η γραμμή του L με την 1η στήλη του U, προκύπτει:**

$$\ell_{11} = 1, \ell_{21} = 4, \ell_{31} = 3.$$

**πολ/ντας την 1η, γραμμή του L με τη 2η, 3η στήλη του U, προκύπτει:**

$$u_{12} = 1, u_{13} = 1$$

**Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα**

**Παράδειγμα**

**Να λυθεί το σύστημα:**

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

**Σχηματίζουμε τον Α** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ **και στη συνέχεια τους L, U:**

$$\text{L}=\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix}, \quad \text{U}=\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**πολ/ντας τη 2η και 3η γραμμή του L με τη 2η στήλη του U, προκύπτει:**

$$\ell_{22} = -1, \ \ell_{32} = 2$$

**πολ/ντας τη 2η γραμμή του L με τη 3η στήλη του U, προκύπτει:**

$$u_{23} = 5$$

**πολ/ντας τη 3η γραμμή του L με τη 3η στήλη του U, προκύπτει:**

$$\ell_{33} = -10$$

## Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

### Παράδειγμα

**Να λυθεί το σύστημα:**

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

**Άρα οι πίνακες L, U είναι:**

$$\mathrm{L}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{U}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**οπότε συνεχίζουμε ως: Lz=b, δλδ**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

**οπότε** $z^T = [1, -2, -1/2]$

**Ακόμη Ux=z, δλδ:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

**οπότε:** $x^T = [1, 1/2, -1/2]$

# Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

## Εισαγωγή

### Norm πίνακα

**Πρόκειται για έναν >0 αριθμό που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες**

1. $\|A\| > 0,\ A \neq \mathbf{0},$
2. $\|\mathbf{0}\| = 0,\ A \neq \mathbf{0},$
3. $\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|,\ \forall\, c \in \mathrm{C},$
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$
5. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$

**Οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες norms είναι οι:**

1. $\|A\|_\infty = max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|,\ i = 1(1)n,$
2. $\|A\|_1 = max_k \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|,\ k = 1(1)n,$
3. $\|A\|_M = n \cdot max_{i,k}|a_{ik}|,\ i, k = 1(1)n,$
4. spectral norm $\|A\|_2 = \left[\rho(AA^H)\right]^{1/2}$

# Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

## Εισαγωγή

### Δείκτης Κατάστασης Πίνακα

**Αν για ένα γραμμικό σύστημα ορίζεται ο αντίστροφος του A και για κάποια norm ισχύει** $\|A^{-1}\delta A\|$

**τότε θα ισχύει και:** $\frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A)}{(1 - \|A^{-1}\delta A\|)}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$

**Η ποσότητα** $k(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$ **ονομάζεται δείκτης κατάστασης πίνακα και συμβολίζεται με cond(A).**

**Το αριστερό τμήμα εκφράζει το *σχετικό σφάλμα στο x*. Ο πρώτος όρος στην παρένθεση (δεξίο μέλος) εκφράζει το *σχετικό σφάλμα στον A* και ο δεύτερος το *σχετικό σφάλμα στο b*.**

## Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

### Εισαγωγή

**Δείκτης Κατάστασης Πίνακα**

**Αν** $\|\delta b\| = 0 \Rightarrow \frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A)}{(1 - \|A^{-1}\delta A\|)} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$

**Αν** $\|\delta A\| = 0 \vee 1 - \|A^{-1}\delta A\| \geq 1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\| = 1$

**τότε** $\frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \leq k(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

**=> αν το k(A) είναι *μικρό* τότε το σύστημα είναι ευσταθές (μικρές μεταβολές στο A, b συνεπάγονται μικρές μεταβολές στα x)**

**=> να το k(A) είναι *μεγάλο* τότε το σύστημα είναι ασταθές (μικρές μεταβολές στο A, b συνεπάγονται μεγάλες μεταβολές στα x)**

## Εισαγωγή

### Δείκτης Κατάστασης Πίνακα

**Για spectral norms** $k(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\|\lambda\|}{\|\mu\|}}$

**όπου τα λ, μ είναι η μέγιστη και ελάχιστη σε μέτρο ιδιοτιμή του πίνακα $AA^H$ (ο $A^H$ είναι ο συζηγής κα ανάστροφος του A), και αν ο πίνακας A είναι ερμιτιανός ή συμμετρικός τότε** $k(A) = \frac{\|\lambda_1\|}{\|\mu_1\|}$ **όπου τα $\lambda_1$, $\mu_1$ είναι η μέγιστη και ελάχιστη σε μέτρο ιδιοτιμή του πίνακα A.**

# Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

## Παράδειγμα

**Να βρεθεί ο δείκτης κατάστασης του πίνακα του συστήματος**

$$\begin{bmatrix} 2.1 & 1.8 \\ 6.2 & 5.3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 6.2 \end{bmatrix}$$

$$B = A \cdot A^H = \begin{bmatrix} 2.1 & 1.8 \\ 6.2 & 5.3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2.1 & 6.2 \\ 1.8 & 5.3 \end{bmatrix}$$

$$det(B - tI) = 0 \ \ldots$$

# Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης