ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ: Διανυσματικοί Χώροι (3)

ΙΟΝΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Βλάμος Παναγιώτης

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Ιονίου Πανεπιστημίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Διανυσματικοί Χώροι

Βάση και Διάσταση

-> **ένα σύνολο διανυσμάτων** S={u1,u2,..,un} **είναι μια *βάση* του** V **αν έχει τις εξής δύο ιδιότητες:** (1) **Το** S **είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και** (2) **το** S **παράγει τον** V**.**

-> **ένα σύνολο διανυσμάτων** S={u1,u2,..,un} **είναι μια *βάση* του** V **αν** ∀ **v** ∈ V **μπορει να γραφτεί *μοναδικα* ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης.**

Διανυσματικοί Χώροι

Βάση και Διάσταση

Θεώρημα: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος τέτοιος ώστε μια βάση να έχει m στοιχεία και μια άλλη βάση να έχει n στοιχεία. Τότε m=n.

Τότε ο διανυσματικός χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης "n" ή n-διάστατος: dim(V)=n

Suppose $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ is a basis of V, and suppose $\{v_1, v_2, \ldots\}$ is another basis of V. Since $\{u_i\}$ spans V, the basis $\{v_1, v_2, \ldots\}$ must contain n or less vectors, or else it is linearly dependent by Problem 5.39 (Lemma 5.13). On the other hand, if the basis $\{v_1, v_2, \ldots\}$ contains less than n elements, then $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ is linearly dependent by Problem 5.39. Thus the basis $\{v_1, v_2, \ldots\}$ contains exactly n vectors, and so the theorem is true.

Διανυσματικοί Χώροι

Βάση και Διάσταση

-->**Ο διανυσματικός χώρος {0} έχει διάσταση 0.**

-->**Εάν ένας διανυσματικός χώρος V δεν έχει πεπερασμένη βάση, τότε λέμε ότι ο V είναι απειρόριστης διάστασης ή απειροδιάστατος.**

Let $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ be a subset of a vector space V. Show that the following two conditions are equivalent: (a) S is linearly independent and spans V, and (b) every vector $v \in V$ can be written uniquely as a linear combination of the vectors in S.

Suppose (a) holds. Since S spans V, the vector v is a linear combination of the u_i; say,

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$$

Suppose we also have

$$v = b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_nu_n$$

Διανυσματικοί Χώροι

Βάση και Διάσταση

Subtracting, we get

$$0 = v - v = (a_1 - b_1)u_1 + (a_2 - b_2)u_2 + \cdots + (a_n - b_n)u_n$$

But the u_i are linearly independent; hence the coefficients in the above relation are each 0:

$$a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0, \ldots, a_n - b_n = 0$$

Therefore, $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$; hence the representation of v as a linear combination of the u_i is unique. Thus (a) implies (b).

Suppose (b) holds. Then S spans V. Suppose

$$0 = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$$

However, we do have

$$0 = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_n$$

By hypothesis, the representation of 0 as a linear combination of the u_i is unique. Hence each $c_i = 0$ and the u_i are linearly independent. Thus (b) implies (a).

Διανυσματικοί Χώροι

Βάση και Διάσταση

-> **Υποθέτουμε ότι το** {v1,v2,...,vn} **παράγει τον** V **και ότι το** {w1,w2,...,wm} **είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Τότε** m≤n, **και ο** V **παράγεται από ένα σύνολο**:

{w1,w2,...,wm,vi_1,vi_2,...,vi_n-m}

Έτσι n+1 **ή περισσότερα διανύσματα στον** V **είναι γραμμικά εξαρτημένα.**

Διανυσματικοί Χώροι

Βάση και Διάσταση

(*a*) Consider the vector space $\mathbf{M}_{2,3}$ of all 2×3 matrices over a field K. Then the following six matrices form a basis of $\mathbf{M}_{2,3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

More generally, in the vector space $\mathbf{M}_{r,s}$ of $r \times s$ matrices let E_{ij} be the matrix with ij-entry 1 and 0 elsewhere. Then all such matrices E_{ij} form a basis of $\mathbf{M}_{r,s}$, called the *usual basis* of $\mathbf{M}_{r,s}$. Then $\dim \mathbf{M}_{r,s} = rs$. In particular, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ form the usual basis for K^n.

(*b*) Consider the vector space $\mathbf{P}_n(t)$ of polynomials of degree $\leq n$. The polynomials $1, t, t^2, \ldots, t^n$ form a basis of $\mathbf{P}_n(t)$, and so $\dim \mathbf{P}_n(t) = n + 1$.

Διανυσματικοί Χώροι

Βάση και Διάσταση

(*a*) Consider the following four vectors in $\mathbf{R}^4$:

$$(1, 1, 1, 1) \qquad (0, 1, 1, 1) \qquad (0, 0, 1, 1) \qquad (0, 0, 0, 1)$$

Note that the vector will form a matrix in echelon form; hence the vectors are linearly independent. Furthermore, since $\dim \mathbf{R}^4 = 4$, the vectors form a basis of $\mathbf{R}^4$.

(*b*) Consider the following $n + 1$ polynomials in $\mathbf{P}_n(t)$:

$$1, t - 1, (t - 1)^2, \ldots, (t - 1)^n$$

The degree of $(t - 1)^k$ is k; hence no polynomial can be a linear combination of preceding polynomials. Thus the polynomials are linearly independent. Furthermore, they form a basis of $\mathbf{P}_n(t)$ since $\dim \mathbf{P}_n(t) = n + 1$.

Διανυσματικοί Χώροι

Βάση και Διάσταση

-->Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n. Τότε (α) Οποιαδήποτε n+1 ή περισσότερα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα

(β) Οποιοδήποτε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο S={u1,u2,...,un} με n στοιχεία είναι μια βάση του V.

(γ) οποιοδήποτε σύνολο γεννητόρων T={v1,v2,...,vn} του V με n στοιχεία είναι μια βάση του V.

Διανυσματικοί Χώροι

Βάση και Διάσταση

Suppose $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ is a basis of V.

(i) Since B spans V, any $n+1$ or more vectors are linearly dependent by Lemma 5.13.

(ii) By Lemma 5.13, elements from B can be adjoined to S to form a spanning set of V with n elements. Since S already has n elements, S itself is a spanning set of V. Thus S is a basis of V.

(iii) Suppose T is linearly dependent. Then some v_i is a linear combination of the preceding vectors. By Problem 5.38, V is spanned by the vectors in T without v_i and there are $n-1$ of them. By Lemma 5.13, the independent set B cannot have more than $n-1$ elements. This contradicts the fact that B has n elements. Thus T is linearly independent and hence T is a basis of V.

Διανυσματικοί Χώροι

Βάση και Διάσταση

-->Έστω ότι το S παράγει ένα διανυσματικό χώρο V. Τότε:

(α) Οποιοσδήποτε μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στο S σχηματίζουν μία βάση του V.

(β) Υποθέτοντας ότι από το S διαγράφεται κάθε διάνυσμα που είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των προηγούμενων διανυσμάτων στο S, τότε τα εναπομείναντα διανύσματα σχηματίζουν μια βάση του V.

Διανυσματικοί Χώροι

Βάση και Διάσταση

(i) Suppose $\{v_1, \ldots, v_m\}$ is a maximal linearly independent subset of S, and suppose $w \in S$. Accordingly $\{v_1, \ldots, v_m, w\}$ is linearly dependent. No v_k can be a linear combination of preceding vectors; hence w is a linear combination of the v_i. Thus $w \in \text{span } v_i$ and hence $S \subseteq \text{span } v_i$. This leads to

$$V = \text{span } S \subseteq \text{span } v_i \subseteq V$$

Thus $\{v_i\}$ spans V and, since it is linearly independent, it is a basis of V.

(ii) The remaining vectors form a maximal linearly independent subset of S and hence by part (i) it is a basis of V.

Διανυσματικοί Χώροι

Βάση και Διάσταση

-->Έστω V ένας διασυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω S={v1,v2,...,vn} ένα σύνολο γραμμικά ανέξαρτητων διανυσμάτων στον V. Τότε το S είναι μέρος μιας βάσης του V, δλδ μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση του V.

Suppose $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ is a basis of V. Then B spans V and hence V is spanned by

$$S \cup B = \{u_1, u_2, \ldots, u_r, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

By Theorem 5.15, we can delete from $S \cup B$ each vector which is a linear combination of preceding vectors to obtain a basis B' for V. Since S is linearly independent, no u_k is a linear combination of preceding vectors. Thus B' contains every vector in S. Thus S is part of the basis B' for V.

Διανυσματικοί Χώροι

Βάση και Διάσταση

-->**Εάν το W είναι ένας υποχώρος ενός n-διάστατου διανυσματικού χώρου V, τότε dim(W)≤n. Συγκεκριμένα αν dim(W)=n--->W=V.**

Since V is of dimension n, any $n+1$ or more vectors are linearly dependent. Furthermore, since a basis of W consists of linearly independent vectors, it cannot contain more than n elements. Accordingly, $\dim W \leq n$.

In particular, if $\{w_1, \ldots, w_n\}$ is a basis of W, then, since it is an independent set with n elements, it is also a basis of V. Thus $W = V$ when $\dim W = n$.

Διανυσματικοί Χώροι

Βάση και Διάσταση

-->**Εάν το W είναι ένας υποχώρος ενός n-διάστατου διανυσματικού χώρου V, τότε dim(W)≤n. Συγκεκριμένα αν dim(W)=n--->W=V.**

Example 5.9. Let W be a subspace of the real space $\mathbf{R}^3$. Now $\dim \mathbf{R}^3 = 3$; hence by Theorem 5.17 the dimension of W can only be 0, 1, 2, or 3. The following cases apply:

(i) $\dim W = 0$, then $W = \{0\}$, a point;

(ii) $\dim W = 1$, then W is a line through the origin;

(iii) $\dim W = 2$, then W is a plane through the origin;

(iv) $\dim W = 3$, then W is the entire space $\mathbf{R}^3$.

Διανυσματικοί Χώροι

Εφαρμογή στους Πίνακες-Ο Βαθμός ενός Πίνακα

Έστω A ένας οποιοσδήποτε mxn **πίνακας πάνω σε ένα πεδίο** K. **Θυμίζουμε ότι οι γραμμές του μπορούν να θεωρηθούν διανύσματα στον** K^n **και ότι ο χώρος γραμμών του** A, **που γράφεται** rowsp(A) **είναι υποχώρος του** K^n **που παράγεται από τις γραμμές του** A (**όμοια και για** colsp(A)).

-> **Ο βαθμός ενός πίνακα** A, **που γράφεται** rank(A), **ισούται με τον μέγιστο αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του** A, **ή ισοδύναμα με τη διάσταση του χώρου γραμμών του** A.

Διανυσματικοί Χώροι

Εφαρμογή στους Πίνακες-Ο Βαθμός ενός Πίνακα

Example 5.10. Suppose we want to find a basis and the dimension of the row space of

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

We reduce A to echelon form using the elementary row operations:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Recall that row equivalent matrices have the same row space. Thus the nonzero rows of the echelon matrix, which are independent by Theorem 5.11, form a basis of the row space of A. Thus $\dim \operatorname{rowsp} A = 2$ and so $\operatorname{rank} A = 2$.

Διανυσματικοί Χώροι

Εφαρμογή στους Πίνακες-Ο Βαθμός ενός Πίνακα

Προβλήματα Εύρεσης Βάσης

Θα δούμε πως μια κλιμακωτή μορφή ενός οποιουδήποτε πίνακα A **μας δίνει την λύση σε προβλήματα που αφορούν στον** A. **Συγκεκριμένα έστω** A, B **οι πίνακες** (A~B).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 11 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 8 & 9 & 9 \\ 2 & 6 & 8 & 11 & 9 & 12 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για τις στήλες του C1, C2, C3,...,C6 **θα λύσουμε τα εξής προβλήματα**:

Διανυσματικοί Χώροι

Εφαρμογή στους Πίνακες-Ο Βαθμός ενός Πίνακα

Προβλήματα Εύρεσης Βάσης

1) **Εύρεση μιας βάσης του χώρου γραμμών του A**
2) **Εύρεση της κάθε στήλης του** A **που είναι γραμμικώς συνδυασμός των προηγούμενων στηλών του** A
3) **Εύρεση μιας βάσης του χώρου στηλών του** A**.**
4) **Εύρεση του βαθμού** rank(A)**.**

Διανυσματικοί Χώροι

Εφαρμογή στους Πίνακες-Ο Βαθμός ενός Πίνακα

Προβλήματα Εύρεσης Βάσης

1) **Εύρεση μιας βάσης του χώρου γραμμών του Α**

Μας δίνεται ότι Α~Β **άρα έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών. Ο** Β **βρίσκεται σε κλιμακωτή μορφή, οπότε οι μηδενικές καταχωρίσεις του είναι γραμμικά ανεξάρτητες και άρα σχηματίζουν μια βάση του χώρου γραμμών του** Β. **Άρα και του** Α...

βάση του rawsp(A): (1,2,1,3,1,2), (0,1,3,1,2,1), (0,0,0,1,1,2),

Διανυσματικοί Χώροι

Εφαρμογή στους Πίνακες-Ο Βαθμός ενός Πίνακα

Προβλήματα Εύρεσης Βάσης

2) **Εύρεση της κάθε στήλης του** A **που είναι γραμμικώς συνδυασμός των προηγούμενων στηλών του** A

Έστω M_k=[C1,C2,...,Ck] **ο υποπίνακας του** A **που αποτελείται από τις πρώτες** k **στήλες του** A. **Τότε** M_{k-1} **και** M_k **είναι ο πίνακας συντελεστών και ο επαυξημένος πίνακας**, **αντίστοιχα**, **της διανυσματικής εξίσωσης**:

x1C1+x2C2+...+xk-1Ck-1=Ck

Έχουμε δει ότι το σύστημα έχει λύση αν και μόνο άν rank(Mk)=rank(Mk-1) (**δλδ είναι γραμμικώς συνδυασμός των προηγούμενων στηλών. Με** rank(Mk) **ο αριθμών των "οδηγών" σε μια κλιμακωτή μορφή του** Mk. **Και**:

Εφαρμογή στους Πίνακες-Ο Βαθμός ενός Πίνακα

Προβλήματα Εύρεσης Βάσης

Και: rank(M2)=rank(M3)=2 **και** rank(M4)=rank(M5)=rank(M6)=3

Δλδ κάθε μια από τις C3, C5, C6 **είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των προηγούμενων στηλών του** A.

Διανυσματικοί Χώροι

Εφαρμογή στους Πίνακες-Ο Βαθμός ενός Πίνακα

Προβλήματα Εύρεσης Βάσης

3) **Εύρεση μιας βάσης του χώρου στηλών του** A.

Το γεγονός ότι οι εναπομείνουσες στήλες C1,C2,C4 **δεν είναι γραμμικοί συνδυασμοί των αντιστοίχων προηγουμένων στηλών σημαίνει ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και άρα σχηματίζουν μια βάση του χώρου στηλών του** A. **Δλδ.**

Βάση του colsp(A): $[1,2,3,1,2]^T$, $[2,5,7,5,6]^T$, $[3,7,11,8,11]^T$

Διανυσματικοί Χώροι

Εφαρμογή στους Πίνακες-Ο Βαθμός ενός Πίνακα

Προβλήματα Εύρεσης Βάσης

4) **Εύρεση του βαθμού** rank(A).

(α) **Υπάρχουν τρείς οδηγοί στον** B, **ο οποίος είναι μια κλιμακωτή μορφή του** A.

(β) **Οι τρείς οδηγοί στον** B **αντιστοιχούν στις μη-μηδενικές γραμμές του, οι οποίες σχηματίζουν μια βάση του χώρου γραμμών του** A.

(γ) **Οι τρεις οδηγοί στον B αντιστοιχούν στις στήλες του** A, **οι οποίες σχηματίζουν μια βάση του χώρου στηλών του A.**

Οπότε rank(A)=3

Διανυσματικοί Χώροι

Εφαρμογή στους Πίνακες-Ο Βαθμός ενός Πίνακα

Εφαρμογή στην Εύρεση Βάσης του W=span{u1,u2,...,un}

Συχνά μας δίνεται μια λίστα διανυσμάτων στον K^n S={u1,u2,...,un} και μας ζητείται να βρούμε μια βάση για τον υποχώρο W του K^n που παράγεται από δεδομένα διανύσματα, δλδ μια βάση του

W=span{S}=span{u1,u2,...,un}

Αλγόριθμος Χώρου Γραμμών

1-> Σχηματίζουμε τον πίνακα M του οποίου οι γραμμές είναι τα δεδομένα διανύσματα

2-> Ανάγουμε με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών τον M σε κλιμακωτή μορφή.

3-> Η ζητούμενη βάση απαρτίζεται από τις μη μηδενικές γραμμές του κλιμακωτού πίνακα.

Διανυσματικοί Χώροι

Εφαρμογή στους Πίνακες-Ο Βαθμός ενός Πίνακα

Εφαρμογή στην Εύρεση Βάσης του W=span{u1,u2,...,un}

Μερικές φορές θέλουμε να βρούμε μια βάση που να προέρχεται μόνο από τα αρχικά δεδομένα διανύσματα.

Αλγόριθμος Αποβολής

1-> **Σχηματίζουμε τον πίνακα** M **του οποίου οι στήλες είναι τα δεδομένα διανύσματα**

2-> **Ανάγουμε με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς τον** M **σε κλιμακωτή μορφή.**

3-> **Για την κάθε στήλη** Ck **στον κλιμακωτό πίνακα χωρίς οδηγό, διαγράφουμε το διάνυσμα** uk **από την λίστα** S**.**

3-> **Η ζητούμενη βάση απαρτίζεται από τα εναπομείναντα διανύσματα στο** S **(αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγούς).**

Διανυσματικοί Χώροι

Εφαρμογή στους Πίνακες-Ο Βαθμός ενός Πίνακα

Εφαρμογή στην Εύρεση Βάσης του W=span{u1,u2,....,un}

Example 5.12. Let W be the subspace of $\mathbf{R}^5$ spanned by the following vectors:

$$v_1 = (1, 2, 1, -2, 3) \qquad v_2 = (2, 5, -1, 3, -2) \qquad v_3 = (1, 3, -2, 5, -5)$$

$$v_4 = (3, 1, 2, -4, 1) \qquad v_5 = (5, 6, 1, -1, -1)$$

We use Algorithm *5.8B* to find the dimension and a basis of W.

First form the matrix M whose columns are the given vectors, and reduce the matrix to echelon form:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & -8 & -8 & -8 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 37 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & -48 & -48 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe that the pivots in the echelon matrix appear in columns C_1, C_2, and C_4. The fact that column C_3 does not have a pivot means that the system $xv_1 + yv_2 - v_3$ has a solution and hence v_3 is a linear combination of v_1 and v_2. Similarly, the fact that column C_5 does not have a pivot means that v_5 is a linear combination of preceding vectors. Accordingly, the vectors v_1, v_2 and v_4, which correspond to the columns in the echelon matrix with pivots, form a basis of W and dim $W = 3$.

Διανυσματικοί Χώροι

Αθροίσματα και Ευθέα Αθροίσματα

Έστω U, W δύο υποσύνολα ενός διανυσματικού χώρου V. Το άθροισμα των U, W, $U+W$, αποτελείται από όλα τα αθροίσματα $u+w$, $u\in U$ και $w\in W$.

$$U+W=\{v:v=u+w, \text{ με } u\in U \text{ και } w\in W\}$$

Αν επιπλέον τα U, W είναι και υποχώροι του V, τότε μπορεί να δειχτεί (ΑΣΚΗΣΗ) ότι και το $U+W$ είναι υποχώρος του V. Υπενθυμίζεται ότι και ο $U\cap W$ είναι υποχώρος.

-->Έστω δύο υποχώροι U, W του V, πεπερασμένης διάστασης. Τότε και ο $U+W$ έχει πεπερασμένη διάσταση και

$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U+W)$

Αθροίσματα και Ευθέα Αθροίσματα

-->Έστω δύο υποχώροι U, W του V, πεπερασμένης διάστασης. Τότε και ο U+W έχει πεπερασμένη διάσταση και

dim(U+W)=dim(U)+dim(W)-dim(U+W)

Example 5.13. Suppose U and W are the xy and yz planes, respectively, in $\mathbf{R}^3$. That is,

$$U = \{(a, b, 0)\} \qquad \text{and} \qquad W = \{(0, b, c)\}$$

Note $\mathbf{R}^3 = U + W$; hence $\dim(U + W) = 3$. Also $\dim U = 2$ and $\dim W = 2$. By Theorem 5.22,

$$3 = 2 + 2 - \dim(U \cap W) \qquad \text{or} \qquad \dim(U \cap W) = 1$$

This agrees with the facts that $U \cap W$ is the y axis (Fig. 5-3) and the y axis has dimension 1.

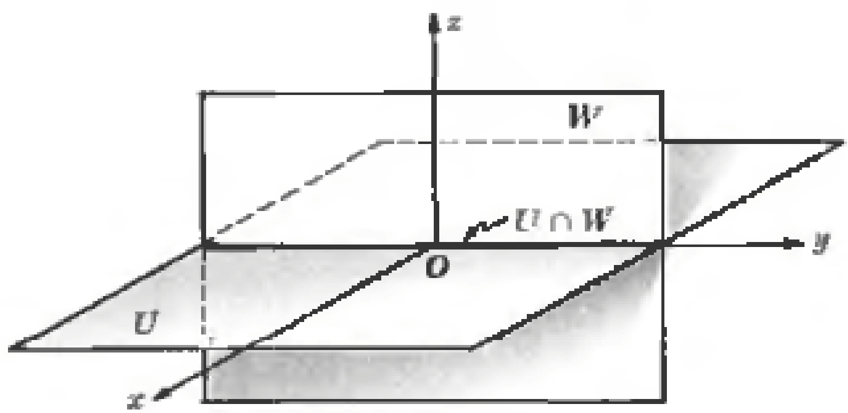

Fig. 5-3

Διανυσματικοί Χώροι

Αθροίσματα και Ευθέα Αθροίσματα

Ο διανυσματικός χώρος V **καλείται ευθύ άθροισμα των υποχώρων του,** U+W **και συμβολίζεται με** $V=U\oplus W$ **αν κάθε** v **μπορεί να γραφτεί μοναδικά ως** v=u+w**.**

-->**Ο διανυσματικός χώρος** V **είναι το ευθύ άθροισμα των υποχώρων του** U, W **αν και μόνο αν α)** V=U+W, **έχει πεπερασμένη διάσταση και β)** $U\cap W=\{0\}$**.**

Διανυσματικοί Χώροι

Αθροίσματα και Ευθέα Αθροίσματα

(*a*) In the vector space $\mathbf{R}^3$, let U be the xy plane and let W be the yz plane:

$$U = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbf{R}\} \qquad \text{and} \qquad W = \{(0, b, c) : b, c \in \mathbf{R}\}$$

Then $\mathbf{R}^3 = U + W$ since every vector in $\mathbf{R}^3$ is the sum of a vector in U and a vector in W. However, $\mathbf{R}^3$ is not the direct sum of U and W since such sums are not unique; for example,

$$(3, 5, 7) = (3, 1, 0) + (0, 4, 7) \qquad \text{and also} \qquad (3, 5, 7) = (3, -4, 0) + (0, 9, 7)$$

(*b*) In $\mathbf{R}^3$, let U be the xy plane and let W be the z axis:

$$U = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbf{R}\} \qquad \text{and} \qquad W = \{(0, 0, c) : c \in \mathbf{R}\}$$

Now any vector $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ can be written as the sum of a vector in U and a vector in V in one and only one way:

$$(a, b, c) = (a, b, 0) + (0, 0, c)$$

Accordingly, $\mathbf{R}^3$ is the direct sum of U and W, that is, $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$. Alternatively, $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$ since $\mathbf{R}^3 = U + W$ and $U \cap W = \{0\}$.

Διανυσματικοί Χώροι

Αθροίσματα και Γενικά Ευθέα Αθροίσματα

Η έννοια ενός ευθέος αθροίσματος μπορεί να αναλυθεί σε περισσότερους από ένα παράγοντες. Έτσι ο διανυσματικός χώρος V καλείται ευθύ άθροισμα των υποχώρων του, W1, W2,…,Wr και συμβολίζεται με V=W1⊕W2⊕…⊕Wr αν κάθε v μπορεί να γραφτεί μοναδικά ως v=w1+w2+…+wr.

Suppose $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$. Also, for each i, suppose S_i is a linearly independent subset of W_i. Then

(*a*) The union $S = \bigcup_i S_i$ is linearly independent in V.

(*b*) If S_i is a basis of W_i, then $S = \bigcup_i S_i$ is a basis of V.

(*c*) $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_r$

Suppose $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ (where V has finite dimension) and suppose

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_r$$

Then $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$.

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης