ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ: Διανυσματικοί Χώροι (2)

ΙΟΝΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Βλάμος Παναγιώτης

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Ιονίου Πανεπιστημίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Διανυσματικοί Χώροι

Υποχώροι

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα πεδίο K, και έστω W ένα υποσύνολο του V. Τότε το W είναι ένας υποχώρος του V έαν είναι και το ίδιο διανυσματικός χώρος πάνω στο πεδίο K ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολ/μού.

Γενικά: Για $W \subseteq V$ **τότε το W θα είναι διαν. Υποχώρος**

$$1.\ \vec{0} \in W$$

$$2.\ \forall\, \vec{u},\ \vec{v} \in W,\ \kappa\alpha\iota\ a,\ b \in K \Rightarrow a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} \in W$$

Διανυσματικοί Χώροι

Υποχώροι

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα πεδίο Κ τότε περιέχει δύο υποχώρους α) {0}, και β) {V}. Αυτοί είναι οι *τετριμένοι* υποχώροι του V.

Παράδειγμα:

(*a*) Let V be any vector space. Then the set $\{0\}$ consisting of the zero vector alone, and also the entire space V are subspaces of V.

(*b*) Let W be the xy plane in $\mathbf{R}^3$ consisting of those vectors whose third component is 0; or, in other words $W = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbf{R}\}$. Note $0 = (0, 0, 0) \in W$ since the third component of 0 is 0. Further, for any vectors $u = (a, b, 0)$ and $v = (c, d, 0)$ in W and any scalar $k \in \mathbf{R}$, we have

$$u + v = (a + c, b + d, 0) \qquad \text{and} \qquad ku = (ka, kb, 0)$$

belong to W. Thus W is a subspace of V.

(*c*) Let $V = \mathbf{M}_{n,n}$ the space of $n \times n$ matrices. Then the subset W_1 of (upper) triangular matrices and the subset W_2 of symmetric matrices are subspaces of V since they are nonempty and closed under matrix addition and scalar multiplication.

(*d*) Recall that $\mathbf{P}(t)$ denotes the vector space of polynomials. Let $\mathbf{P}_n(t)$ denote the subset of $\mathbf{P}(t)$ that consists of all polynomials of degree $\leq n$, for a fixed n. Then $\mathbf{P}_n(t)$ is a subspace of $\mathbf{P}(t)$. This vector space $\mathbf{P}_n(t)$ will occur very often in our examples.

Διανυσματικοί Χώροι

Υποχώροι

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα πεδίο K τότε περιέχει δύο υποχώρους α) {0}, και β) {V}. Αυτοί είναι οι *τετριμένοι* υποχώροι του V.

Παράδειγμα:

Example 5.2. Let U and W be subspaces of a vector space V. We show that t[illegible]tersection $U \cap W$ is also a subspace of V. Clearly $0 \in U$ and $0 \in W$ since U and W are subspaces; whe[illegible] $0 \in U \cap W$. Now suppose $u, v \in U \cap W$. Then $u, v \in U$ and $u, v \in W$ and, since U and W are subspaces,

$$u + v,\ ku \in U \qquad \text{and} \qquad u + v,\ ku \in W$$

for any scalar k. Thus $u + v, ku \in U \cap W$ and hence $U \cap W$ is a subspace of V.

The result in the preceding example generalizes as follows.

Υποχώροι

Το προηγούμενο παράδειγμα συνοψίζεται στο:

Η τομή οποιονδήποτε υποχώρων του V είναι επίσης υποχώρος του V.

Recall that any solution u of a system $AX = B$ of linear equations in n unknowns may be viewed as a point in K^n; and thus the solution set of such a system is a subset of K^n. Suppose the system is homogeneous, i.e., suppose the system has the form $AX = 0$. Let W denote its solution set. Since $A0 = 0$, the zero vector $0 \in W$. Moreover, if u and v belong to W, i.e., if u and v are solutions of $AX = 0$, then $Au = 0$ and $Av = 0$. Therefore, for any scalars a and b in K, we have

$$A(au + bv) = aAu + bAv = a0 + b0 = 0 + 0 = 0$$

Thus $au + bv$ is also a solution of $AX = 0$ or, in other words, $au + bv \in W$. Accordingly, by the above Corollary 5.3, we have proved:

Theorem 5.5: The solution set W of a homogenous system $AX = 0$ in n unknowns is a subspace of K^n.

We emphasize that the solution set of a nonhomogenous system $AX = B$ is not a subspace of K^n. In fact, the zero vector 0 does not belong to its solution set.

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμικές Επεκτάσεις – Ο Χώρος Γραμμών ενός πίνακα

Έστω διανύσματα $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3, \cdots,\ \vec{u}_n,\ \in V$ **και ο γρ. συνδυασμός τους** $a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 + \cdots + a_n\vec{u}_n$

Η συλλογή όλων των γρ. Συνδυασμών συμβολίζεται ως:

$$span\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3, \cdots,\ \vec{u}_n\}\ \eta'\ span\{u_i\}$$

$$\vec{0}\ \in\ span : \vec{0} = 0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \cdots + 0\vec{u}_n$$

$$\gamma\iota\alpha\ \vec{u},\ \vec{u}'\ \in\ span\{u_i\}$$

$$\forall k\ \in\ K:\ \vec{u} + \vec{u}' = (a_1 + b_1)\vec{u}_1 + (a_2 + b_2)\vec{u}_2 + \cdots + (a_n + b_n)\vec{u}_n,\ \kappa\alpha\iota$$

$$k\vec{u} = ka_1\vec{u}_1 + ka_2\vec{u}_2 + \cdots + ka_n\vec{u}_n$$

Επομένως το άθροισμά τους και το βαθμωτό γινόμενο ανήκει επίσης στο span, άρα το span είναι ένας υποχώρος του V.

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμικές Επεκτάσεις – Ο Χώρος Γραμμών ενός πίνακα

Εαν το S είναι ένα υποσύνολο του διαν. Χώρου V, τότε

-> Το span{S} είναι ένας υποχώρος του V που περιέχει το S.

-> Εάν το W είναι ένας υποχώρος του V που περιέχει το S, τότε span{S}$\subseteq$W.

Δλδ, ο span{S} είναι ο *μικρότερος* υποχώρος του V που περιέχει το S.

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμικές Επεκτάσεις – Ο Χώρος Γραμμών ενός πίνακα

Εαν το S είναι ένα υποσύνολο του διαν. Χώρου V, τότε

-> Το span{S} είναι ένας υποχώρος του V που περιέχει το S.

-> Εάν το W είναι ένας υποχώρος του V που περιέχει το S, τότε span{S}$\subseteq$W.

Suppose S is empty. By definition span $S = \{0\}$. Hence span $S = \{0\}$ is a subspace and $S \subseteq$ span S. Suppose S is not empty, and $v \in S$. Then $1v = v \in$ span S; hence S is a subset of span S. Thus span S is not empty since S is not empty. Now suppose $v, w \in$ span S, say

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m \qquad \text{and} \qquad w = b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n$$

where $v_i, w_j \in S$ and a_i, b_j are scalars. Then

$$v + w = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m + b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n$$

and, for any scalar k,

$$kv = k(a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m) = ka_1 v_1 + \cdots + ka_m v_m$$

belong to span S since each is a linear combination of vectors in S. Thus span S is a subspace of V.

Now suppose W is a subspace of V containing S and suppose $v_1, \ldots, v_m \in S \subseteq W$. Then all multiples $a_1 v_1, \ldots, a_m v_m \in W$, where $a_i \in K$, and hence the sum $a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m \in W$. That is, W contains all linear combinations of elements of S. Consequently, span S is a subspace of W, as claimed.

Διανυσματικοί Χώροι

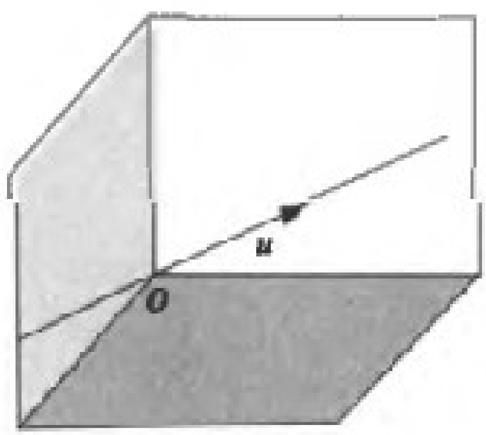
Γραμμικές Επεκτάσεις – Ο Χώρος Γραμμών ενός πίνακα

(*a*) Consider the vector space $\mathbf{R}^3$. The linear span of any nonzero vector $u \in \mathbf{R}^3$ consists of all scalar multiples of u; geometrically, span u is the line through the origin and the endpoint of u as shown in Fig. 5-1(*a*). Also, for any two vectors $u, v \in \mathbf{R}^3$ which are not multiples of each other, span (u, v) is the plane through the origin and the endpoints of u and v as shown in Fig. 5-1(*b*).

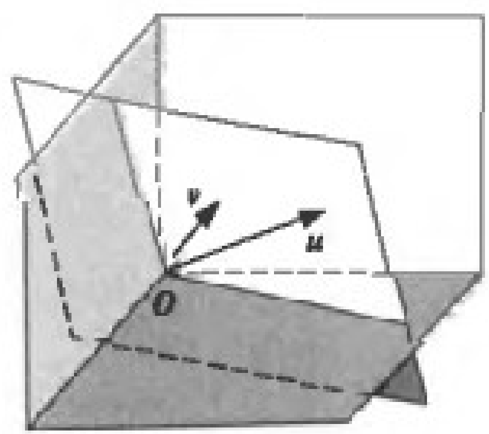
(*b*) The vectors $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ and $e_3 = (0, 0, 1)$ span the vector space $\mathbf{R}^3$. Specifically, for any vector $u = (a, b, c)$ in $\mathbf{R}^3$, we have

$$u = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = ae_1 + be_2 + ce_3$$

That is, u is a linear combination of e_1, e_2, e_3.



(*a*)



(*b*)

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμικές Επεκτάσεις – Ο Χώρος Γραμμών ενός πίνακα

Έστω A=[aij] ένας αυθαίρετος πίνακας mxn πάνω σε ένα πεδίο K. Οι γραμμές του A R1=a11, a12,..,a1n, R2=a21,a22,...,a2n,Rm=am1,am2,...,amn μπορούν να θεωρηθούν ως διανύσματα στον K^n άρα παράγουν ένα υποχώρο του K^n. Ο υποχώρος ονομάζεται *χώρος γραμμών* και συμβολίζεται rowspan(A) (row space). Δλδ:

rowsp(A)=span(R1,R2,...,Rm)

Ανάλογα ισχύουν και για τις στήλες, οπότε προκύπτει ο colsp(A), και ισχύει: colsp(A)=rowsp(A^T)

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμικές Επεκτάσεις – Ο Χώρος Γραμμών ενός πίνακα

Για δύο γραμμοισοδύναμους πίνακες A~B. Πότε;

Έστω ο B προκύπτει από

α) αμοιβαία ανταλλαγή Ri kai Rj

β) Αντικατάσταση της Ri με kRi

γ) Αντικατάσταση της Rj με kRj

Τότε η κάθε γραμμή του B είναι και γραμμή του A ή ένας γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του A. Άρα rawsp(B) $\in$ rawsp(A).

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό θα πάρουμε τον A, οπότε rawsp(A) $\in$ rawsp(B). Κατά συνέπεια οι A, B έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών.

Έτσι προκύπτει το παρακάτω θεώρημα:

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμικές Επεκτάσεις – Ο Χώρος Γραμμών ενός πίνακα

- Οι Γραμμοισοδύναμοι πίνακες έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών.

- Έστω A=[aij], B[bij] δυο γραμμοισοδύναμοι και κλιμακωτοί πίνακες με οδηγούς τα a1j1, a2j2,...arjr και a1k1, a2k2,...asks, τότε οι δύο πίνακες έχουν τον ίδιο αριθμό μη μηδενικών γραμμών ή r=s, και οι οδηγοί τους βρίσκονται στις ίδιες θέσεις.

- Έστω A, B δύο κανονικοί ως προς τις γραμμές πίνακες. Τότε rawsp(A)=rawsp(B) αν και μόνο αν έχουν τις ίδιες μη μηδενικές γραμμές.

Γραμμικές Επεκτάσεις – Ο Χώρος Γραμμών ενός πίνακα

Example 5.4. Show that the subspace U of $\mathbf{R}^4$ spanned by the vectors

$$u_1 = (1, 2, -1, 3) \qquad u_2 = (2, 4, 1, -2) \qquad \text{and} \qquad u_3 = (3, 6, 3, -7)$$

and the subspace W of $\mathbf{R}^4$ spanned by the vectors

$$v_1 = (1, 2, -4, 11) \qquad \text{and} \qquad v_2 = (2, 4, -5, 14)$$

are equal; that is, $U = W$.

Method 1. Show that each u_i is a linear combination of v_1 and v_2, and show that each v_i is a linear combination of u_1, u_2, and u_3. Observe that we have to show that six systems of linear equations are consistent.

Method 2. Form the matrix A whose rows are the u_i, and row reduce A to row canonical form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Now form the matrix B whose rows are v_1 and v_2, and row reduce B to row canonical form:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 2 & 4 & -5 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Since the nonzero rows of the reduced matrices are identical, the row spaces of A and B are equal and so $U = W$.

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμική Εξάρτηση-Ανεξαρτησία

Τα διανύσματα v1,v2,...vn του V είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν υπάρχουν αριθμοί a1, a2, ...a3 του K, ΟΧΙ ΟΛΟΙ 0, για τους οποίους

$$a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n=0$$

Διαφορετικά λέμε ότι τα διανύσματα είναι γρ. Ανεξάρτητα.

1) έστω v1=0 τότε τα παραπάνω είναι γρ. Εξαρτημένα, γιατί?

2) κάθε $v\neq 0$ είναι γρ. ανεξάρτητο γιατί $kv=0$ με $v\neq 0 \Rightarrow \kappa=0$

3)Έστω $v_1=kv_2$ (το k μπορεί να είναι και 1) τότε τα διαν. είναι γρ. εξαρτημένα γιατί: $v_1=kv_2 \Rightarrow v_1-kv_2+0v_3+\ldots+0v_n=0$ (ο συντελεστής του v1 είναι $\neq 0$).

4) δύο διανύσματα είναι γρ. εξαρτημένα αν και μόνο αν το ένα απο αυτα είναι πολ/σιο του άλλου.

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμική Εξάρτηση-Ανεξαρτησία

Τα διανύσματα v1,v2,...vn του V είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν υπάρχουν αριθμοί a1, a2, ...a3 του K, ΟΧΙ ΟΛΟΙ 0, για τους οποίους

$$a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n=0$$

Διαφορετικά λέμε ότι τα διανύσματα είναι γρ. Ανεξάρτητα.

5) Αν το σύνολο {v1,v2,...vn} είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε και οποιαδήποτε αναδιάταξη του θα οδηγήσει σε ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο.

6) αν ένα σύνολο διανυσμάτων, S, είναι γραμμικά ανεξάρτητο τότε και κάθε υποσύνολο του είναι επίσης γρ. ανεξάρτητο. Αλλιώς αν το S περιέχει ένα γραμμικά εξαρτημένο υποσύνολο, τότε και το S είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμική Εξάρτηση-Ανεξαρτησία

Παράδειγμα:

1) (1,1,0), (1,3,2) και (4,9,5).

2) (1,2,3), (2,5,7) και (1,3,5)

3) 'Εστω ο διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων από το R->R. Θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις f(t)=sin t, g(t)=e^t, h(t)=t^2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (hint: t=0,π, π/2)

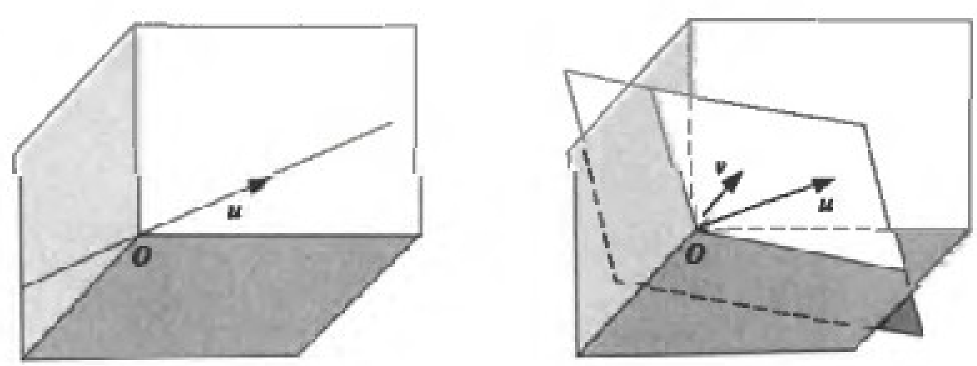
Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμική Εξάρτηση-Ανεξαρτησία

Γραμμική Εξάρτηση στον R^3

1) Δύο διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν βρίσκονται στην ίδια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων (αρ. σχήμα)

2) Τρία διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων (δεξ. σχήμα)



(a) (b)

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμική Εξάρτηση-Ανεξαρτησία

Γραμμική Εξάρτηση και Γραμμικοί συνδυασμοί

Τα διανύσματα v1, v2, v3, ...,vn είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν ένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Για παράδειγμα το vi

$$vi=a1v1+a2v2+...+anvn$$

προσθέτοντας το -vi και στα δύο μέλη

$$0=-vi+a1v1+a2v2+...+anvn$$

με -1≠0, οπότε είναι γραμ. εξαρτημένα. Αντίστροφα, έστω ότι είναι γραμμικών εξαρτημένα, δλδ

$$b1v1+b2v2+...+bnvn=0 \text{ και } bj\neq 0\Rightarrow$$

$$vj=(-b1/bj)v1+(-b2/bj)v2+...+(-bn/bj)vn$$

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμική Εξάρτηση-Ανεξαρτησία

Γραμμική Εξάρτηση και Γραμμικοί συνδυασμοί

$$b_1v_1+b_2v_2+\ldots+b_nv_n=0 \text{ και } b_j\neq 0 \Rightarrow$$

$$v_j=(-b_1/b_j)v_1+(-b_2/b_j)v_2+\ldots+(-b_n/b_j)v_n$$

δλδ το v_j είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Υποθέτοντας ότι 2 ή περισσότερα μη-μηδενικά $v_1, v_2,\ldots,v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε ένα από διανύσματα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμική Εξάρτηση-Ανεξαρτησία

Γραμμική Εξάρτηση και Κλιμακωτοί Πίνακες

Για τον κλιμακωτό πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

παρατηρούμε ότι οι γραμμές R2,R3,R4 έχουν μηδενικά στη δεύτερη στήλη και κάτω από τον οδηγό της R1. Αυτό σημαίνει ότι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των R2,R3,R4 θα έχει μηδενικά στην δεύτερη στήλη ΑΡΑ η R1 δεν μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των R2,R3,R4. Όμοια και οι υπόλοιπες.

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμική Εξάρτηση-Ανεξαρτησία

Γραμμική Εξάρτηση και Κλιμακωτοί Πίνακες

Για τον κλιμακωτό πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητες γιατί καμία δεν μπορεί να παραχθεί από τις άλλες

Οι μη μηδενικές γραμμές ενός πίνακα σε κλιμακωτή μορφή είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Τέλος Ενότητας