ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ: Διανυσματικοί Χώροι (1)

ΙΟΝΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Βλάμος Παναγιώτης

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Ιονίου Πανεπιστημίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Διανυσματικοί Χώροι

Εισαγωγή

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου είναι τα διανύσματα και στη συνέχεια θα χρησιμοποιούνται οι εξής συμβολισμοί:

V	**Ο δεδομένος διανυσματικός χώρος**
$\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$	**διανύσματα στον** V
K	**το δεδομένο πεδίο αριθμών**
$\mathrm{a, b, c, k}$	**αριθμοί στο σύνολο K**

Το K μπορεί να είναι το πραγματικό πεδίο αριθμών R **ή το μιγαδικό πεδίο** C**.**

Διανυσματικοί Χώροι

Εισαγωγή

Οι διανυσματικοί χώροι που θα μελετήσουμε έχουν πεπερασμένη διάσταση. Για παράδειγμα η ευθεία R **έχει *διάσταση*** 1**, το επίπεδο** R^2 **έχει *διάσταση*** 2 **και ο χώρος** R^3 **έχει διάσταση** 3**.**

Κάποιοι χρήσιμοι συμβολισμοί:

$a \in A$	**Το στοιχείο** a **ανήκει στο σύνολο A**
$a, b \in A$	**Τα στοιχεία** a, b **ανήκουν στο σύνολο A**
$\forall x \in A$	**Για κάθε** x **που ανήκει στο A**
$\exists x \in A$	**Υπάρχει** x **που ανήκει στο A**
$A \subseteq B$	**Το A είναι υποσύνολο του B**
$A \cap B$	**Τομή των A και B**
$A \cup B$	**Ένωση των A και B**
ϕ	**Κενό σύνολο**

Διανυσματικοί Χώροι

Εισαγωγή

Έστω V ένα μη κενό σύνολο με δύο πράξεις:

(ι) *Πρόσθεση διανυσμάτων*: Αναθέτει σε δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{u},\ \vec{v}$ **του V ένα *άθροισμα*** $\vec{u}+\vec{v}$ **επίσης είναι στοιχείο του V.**

(ιι) *Βαθμωτός πολλαπλασιασμός*: Αναθέτει σε οποιαδήποτε

$$\vec{u}\in V,\ k\in K\ \tau o\ k\vec{u}\in V$$

Τότε ο V ονομάζεται *διανυσματικός χώρος* (πάνω στο πεδίο K) εάν για οποιαδήποτε $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w},\ \in V$ **ισχύουν τα αξιώματα:**

Διανυσματικοί Χώροι

Εισαγωγή

- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v})+\vec{w})$
- $\forall\, \vec{v}\in V,\ \exists\, \vec{0}\in V,\ \vec{v}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{v}$
- $\forall\, \vec{v}\in V,\ \exists\ -\vec{v}\in V,\ \vec{v}+(-\vec{v})=(-\vec{v})+\vec{v}=\vec{0}$
- $\vec{v}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{v}$

◊ $\forall\, k\in K, k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$

◊ $\forall\, a,\ b\in K,\ (a+b)\vec{v}=a\vec{v}+b\vec{v}$

◊ $\forall\, a,\ b\in K,\ (ab)\vec{v}=a(b\vec{v})$

◊ $1\cdot\vec{v}=\vec{v},\ 1\in K$

Διανυσματικοί Χώροι

Εισαγωγή

Τα παραπάνω αξιώματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

(ι) Τα τέσσερα πρώτα (•) αφορούν μόνο στην προσθετική δομή του V, και συνεπάγονται ότι ο V είναι μια *αντιμεταθετική ομάδα ως προς την πρόσθεση*, δλδ

α) οποιοδήποτε άθροισμα διανυσμάτων δεν απαιτεί παρενθέσεις και δεν εξαρτάται από την σειρά των προσθέσεων,

β) Το μηδενικό διάνυσμα είναι μοναδικό, όπως και το αρνητικό ενός διανύσματος,

γ) $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$

και η αφαίρεση ορίζεται ως η πρόσθεση του αντιστρόφου.

Διανυσματικοί Χώροι

Εισαγωγή

Τα παραπάνω αξιώματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

(ιι) Τα υπόλοιπα τέσσερα (◊) αφορούν στην *επίδραση* του πεδίου αριθμών K πάνω στον διανυσματικό χώρο V (ονομάζεται και εξωτερική πράξη). Έτσι έχουμε τις ιδιότητες ενός διανυσματικού χώρου.

Γενικά: Έστω ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα πεδίο K, τότε:

$$\forall\, k \in K, \vec{0} \in V \Rightarrow k \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

$$0 \in K, \vec{v} \in V \Rightarrow 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$A\nu k \cdot \vec{v} = \vec{0},\ \mu\epsilon\, k \in K, \vec{v} \in V \ \Rightarrow\ k = 0\ \eta'\ \vec{v} = \vec{0}$$

$$\forall\, k \in K, \vec{v} \in V, (-k)\vec{u} = k(-\vec{u}) = -k\vec{u}$$

Διανυσματικοί Χώροι

Εισαγωγή

Απόδειξη:

$$(i)\ k\cdot\vec{v}+k\cdot\vec{0}=k\cdot(\vec{v}+\vec{0})=k\vec{v}\ \Rightarrow k\cdot\vec{0}=\vec{0}$$

$$(ii)\ k\cdot\vec{v}+0\cdot\vec{v}=(k+0)\cdot\vec{v}=k\vec{v}\ \Rightarrow 0\cdot\vec{v}=\vec{0}$$

$$(iii)\ A\nu\ k=0\ \surd.\ A\nu\ k\neq 0\Rightarrow\ \exists k^{-1}\in K^{*}\kappa\alpha\iota$$

$$k\cdot\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow k^{-1}(k\cdot\vec{v})=k^{-1}\cdot\vec{0}\Rightarrow(k^{-1}\cdot k)\cdot\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$1\cdot\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}=\vec{0}$$

$$(iv)\ k+(-k)=0,\ \tau o\tau\epsilon\ \ [k+(-k)]\cdot\vec{v}=0\cdot\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow k\cdot\vec{v}+(-k)\cdot\vec{v}\Leftrightarrow$$

$$(-k)\cdot\vec{v}=-(k\cdot\vec{v}).$$

$$K\alpha\iota\ \vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}\Leftrightarrow k\cdot[\vec{v}+(-\vec{v})]=k\cdot\vec{0}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$k\cdot\vec{v}+k\cdot(-\vec{v})=\vec{0}\Leftrightarrow k\cdot(-\vec{v})=-(k\cdot\vec{v})$$

Διανυσματικοί Χώροι

Εισαγωγή

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων:

α) Το σύνολο των διανυσμάτων είναι ένας διανυσματικός χώρος γιατί ισχύουν και οι (•) καθώς και οι (◊) ιδιότητες.

β) όμοια το σύνολο των πινάκων n x m είναι διανυσματικός χώρος, γιατί ως προς την πρόσθεση πινάκων ισχύουν οι (•) καθώς και για τον πολ/μο αριθμού με πίνακα οι (◊) ιδιότητες.

γ) Ο χώρος των πολυωνύμων P(t):

Διανυσματικοί Χώροι

Εισαγωγή

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων:

γ) Ο χώρος των πολυωνύμων P(t):

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots a_s t^s,\ a_i \in K$$

είναι διανυσματικός χώρος πάνω στον K γιατί:

α) το p(t)+q(t) είναι η συνηθισμένη πρόσθεση διανυσμάτων

β) βαθμωτός πολ/μός: το kp(t) είναι η συνηθισμένη πράξη πολ/μού αριθμού με διάνυσμα ή με πολυώνυμο.

Το μηδενικό στοιχείο είναι το μηδενικό διάνυσμα ή πολυώνυμο.

Διανυσματικοί Χώροι

Εισαγωγή

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων:

δ) Ο χώρος των πολυωνύμων $P_n(t)$ για πολυώνυμα βαθμού μικρότερου ή ίσου του n:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots a_s t^s,\ a_i \in K,\ s \leq n$$

είναι διανυσματικός χώρος πάνω στον K γιατί:

α) το p(t)+q(t) είναι η συνηθισμένη πρόσθεση διανυσμάτων

β) βαθμωτός πολ/μός: το kp(t) είναι η συνηθισμένη πράξη πολ/μού αριθμού με διάνυσμα ή με πολυώνυμο.

Το μηδενικό στοιχείο είναι το μηδενικό διάνυσμα ή πολυώνυμο.

Διανυσματικοί Χώροι

Εισαγωγή

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων:

ε) Ο χώρος των συναρτήσεων F(x): Έστω ότι το F(x) συμβολίζει το σύνολο όλων των συναρτήσεων του x στο K. Τότε το F(x) είναι διαν. χώρος ως προς τις πράξεις:

α)πρόσθεση διανυσμάτων:

$$
\begin{aligned}
&f,\ g \in F \Rightarrow (f+g) \in F\ \ (f+g)(x) = f(x) + g(x),\\
&\forall k \in K,\ (kf)(x) = kf(x),\ \forall\, x \in K\\
&\mathbf{0}(x) = 0,\ \forall\, x \in K\\
&(-f)(x) = -f(x),\ \forall\, x \in K
\end{aligned}
$$

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμικοί συνδυασμοί – Σύνολα Γεννητόρων

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα πεδίο K. Ένα διάνυσμα του V είναι ένας γραμμ. συνδυασμός των διανυσμάτων του V αν υπάρχουν αριθμοί από το σύνολο K ώστε:

$$\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 + \cdots a_n\vec{u}_n,\ \vec{u}_i \in V,\ a_i \in K$$

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμικοί συνδυασμοί – Σύνολα Γεννητόρων

Παράδειγμα:

1) **Να εκφραστεί το** $v(3,7,-4)$ **του** R^3 **σαν γραμμικός συνδυασμός των** $u_1(1,2,3)$, $u_2(2,3,7)$, $u_3(3,5,6)$.

Δλδ θέλουμε αριθμούς x, y, z, **τέτοιους ώστε:**

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμικοί συνδυασμοί – Σύνολα Γεννητόρων

Παράδειγμα:

2) Να εκφραστεί το πολυώνυμο v ως γραμ. συνδυασμός των v_1, v_2, v_3.

$$v = 3t^2 + 5t - 5,\ u_1 = t^2 + 2t + 1,\ u_2 = 2t^2 + 5t + 4,\ u_3 = t^2 + 3t + 6$$

Δλδ θέλουμε αριθμούς x, y, z, τέτοιους ώστε:

$$u = xu_1 + yu_2 + zu_3$$
$$3t^2 + 5t - 5 = x(t^2 + 2t + 1) + y(2t^2 + 5t + 4) + z(t^2 + 3t + 6)$$

a) Αναπτύσσουμε το 2ο μέλος και εξισώνουμε

b) Αυτή η εξίσωση είναι μια ταυτότητα, δλδ επαλυθεύεται για όλα τα t. Οπότε εκλέγουμε t=0,1,-1 k και επιλύουμε.

Διανυσματικοί Χώροι

Γραμμικοί συνδυασμοί – Σύνολα Γεννητόρων

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα πεδίο K. Τότε λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$ σχηματίζουν ένα σύνολο γεννητόρων του V, αν

$$\forall\, \vec{v} \in V,\ \exists\, a_1,\ a_2, \ldots, a_n \in K, \kappa\alpha\iota\ \vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\,\vec{u}_2 + \cdots + a_n\vec{u}_n$$

Τέλος Ενότητας