ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ: Άλγεβρα των Πινάκων (1)

ΙΟΝΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Βλάμος Παναγιώτης

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Ιονίου Πανεπιστημίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άλγεβρα των Πινάκων

Εισαγωγή

Θα μελετήσουμε τις αλγεβρικές πράξεις σε πίνακες (matrices).

Ως πίνακας μπορεί να θεωρηθεί κάθε ορθογώνια παράταξη στοιχείων, π.χ.

	ΟΜΑΔΑ	Β	ΑΓ	ΣΥΝΟΛΟ					ΕΝΤΟΣ					ΕΚΤΟΣ				
				ΥΠΕΡ	ΚΑΤΑ	Ν	Ι	Η	ΥΠΕΡ	ΚΑΤΑ	Ν	Ι	Η	ΥΠΕΡ	ΚΑΤΑ	Ν	Ι	Η
1.	ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΣ	19	8	14	3	6	1	1	13	2	5	0	0	1	1	1	1	1
2.	SKODA ΞΑΝΘΗ	17	8	7	2	5	2	1	3	2	2	0	1	4	0	3	2	0
3.	ΠΑΟΚ	16	8	9	3	4	4	0	5	2	2	2	0	4	1	2	2	0
4.	ΠΑΝΑΘΗΝΑΪΚΟΣ	14	8	14	9	4	2	2	9	5	2	1	1	5	4	2	1	1
5.	ΑΕΚ	13	8	12	11	3	4	1	6	3	3	1	0	6	8	0	3	1
6.	ΛΑΡΙΣΑ	12	8	12	8	3	3	2	8	6	2	0	2	4	2	1	3	0
7.	ΕΡΓΟΤΕΛΗΣ	12	8	11	11	3	3	2	6	6	1	2	1	5	5	2	1	1
8.	ΠΑΝΙΩΝΙΟΣ	11	8	12	10	3	2	3	6	7	1	2	2	6	3	2	0	1
9.	ΑΡΗΣ	10	8	6	8	3	1	4	5	2	3	1	1	1	6	0	0	3
10.	ΠΑΝΘΡΑΚΙΚΟΣ	10	8	5	9	3	1	4	3	3	2	0	2	2	6	1	1	2
11.	ΛΕΒΑΔΕΙΑΚΟΣ	9	8	4	8	2	3	3	2	0	2	2	0	2	8	0	1	3
12.	ΠΑΝΣΕΡΡΑΪΚΟΣ	8	8	6	11	2	2	4	1	4	0	1	2	5	7	2	1	2
13.	ΑΣΤΕΡΑΣ ΤΡΙΠΟΛΗΣ	7	8	6	8	1	4	3	2	2	0	3	0	4	6	1	1	3
14.	ΗΡΑΚΛΗΣ	5	8	5	8	0	5	3	3	4	0	4	1	2	4	0	1	2
15.	ΘΡΑΣΥΒΟΥΛΟΣ	4	8	6	13	1	1	6	3	6	0	1	2	3	7	1	0	4
16.	ΟΦΗ	4	8	8	15	0	4	4	1	7	0	1	3	7	8	0	3	1

Άλγεβρα των Πινάκων

Εισαγωγή

Με τη βοήθεια πινάκων θα δούμε σε παρακάτω κεφάλαια:

- **Επίλυση γραμμικών εξισώσεων**
- **Αλλαγή βάσης**
- **Γραμμικοί μετασχηματισμοί**

Ενώ ταυτόχρονα στοιχεία από αυτά τα πεδία θα προσθέσουν γνώσεις για τους πίνακες

Οι καταχωρίσεις στους πίνακες προέρχονται από οποιοδήποτε σύνολο μπορείτε να φανταστείτε. Στην πράξη θεωρούμε ένα τυχαίο σύνολο K.

Άλγεβρα των Πινάκων

Γενικά

Ένας πίνακας περιγραφεί τα εξής στοιχεία:

$$A_{mn} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Γραμμές **είναι τα (α_{11}, α_{12},...,α_{1n}), (α_{21}, α_{22},...,α_{2n}), (α_{m1}, α_{m2},...,α_{mn}) δλδ οι m οριζόντιες λίστες αριθμών**

Στήλες **είναι οι n κατακόρυφες λίστες:**

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Άλγεβρα των Πινάκων

Γενικά

Έναν τέτοιο πίνακα μπορούμε να τον γράψουμε ως $A=[a_{ij}]$. Ένας πίνακας με m γραμμές και n στήλες ονομάζεται *πίνακας m* x *n*, αυτό το ζεύγος καλείται *μέγεθος* του πίνακα.

Δύο πίνακες είναι ίσοι, A=B, όταν έχουν το ίδιο μέγεθος και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. Δλδ η ισότητα δύο πινάκων m x *n*, αντιστοιχεί σε ένα σύστημα mn ισοτητων, μία για κάθε ζεύγος στοιχείων.

Πίνακας γραμμή και πίνακας στήλη είναι έννοιες γνωστές από το προηγούμενο κεφάλαιο.

Ένας πίνακας με όλα τα στοιχεία μηδενικά καλείται *μηδενικός πίνακας* και συμβολίζεται O.

Άλγεβρα των Πινάκων

Γενικά

Παράδειγμα:

- **Να βρείτε τα x, y, z, w ώστε οι δύο πίνακες να είναι ίσοι:**

$$\begin{bmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- **Για τον ίδιο πίνακα να βρείτε τις τιμές των x, y, z, w ώστε να είναι ο μηδενικός.**

Άλγεβρα των Πινάκων

Πράξεις Πινάκων

Και για την πρόσθεση και τον πολ/μο πινάκων έχετε δει τις αντίστοιχες πράξεις στα διανύσματα. Για να δείξουμε την γενικότητα θεωρούμε δύο πίνακες A=[a_{ij}] και B=[b_{ij}] με ίδιες διαστάσεις και θα δείξουμε την:

πρόσθεση A+B

$$A_{ij}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} \end{bmatrix}, B_{ij}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} \end{bmatrix}, A_{ij}+B_{ij}=C=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1j}+b_{1j} \\ a_{21}+a_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2j}+b_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{ij}+b_{ij} \end{bmatrix}$$

Άλγεβρα των Πινάκων

Πράξεις Πινάκων

πολλαπλασιασμό αριθμού (k) με πίνακα A, kA

$$kA_{ij}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1j} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{ij} \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε τον -A ως (-1)A, δλδ:

$$-1\mathrm{A}_{ij}=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1j} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & -a_{ij} \end{bmatrix}$$

Και ταυτόχρονα ορίζουμε την

αφαίρεση A-B=A+(-1)B

ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΓΙΑ ΠΙΝΑΚΕΣ m x n ΕΙΝΑΙ ΠΙΝΑΚΑΣ m x n!!!!!

Άλγεβρα των Πινάκων

Πράξεις Πινάκων

Παράδειγμα: Έστω δύο πίνακες Α, Β ως εξής να υπολογίσετε τα α) Α+Β, β) 2Α+2Β, γ) Α-Β, δ) 2Α-2Β.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}9 & 8 & 7\\ 6 & 5 & 4\end{bmatrix},$$

Στους πίνακες, όπως και στα διανύσματα, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \quad (A+B)+C=A+(B+C)$$

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u} \quad A+0=A$$

$$\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0} \quad A+(-A)=0$$

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u} \quad A+B=B+A$$

$$k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v} \quad k(A+B)=kA+kB$$

$$(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u} \quad (k+k')A=kA+k'A$$

$$(kk')\vec{u}=k(k'\vec{u}) \quad (kk')A=k(k'A)$$

$$1\vec{u}=\vec{u} \quad 1A=A$$

Άλγεβρα των Πινάκων

Γενικά

Το σύμβολο της άθροισης ∑: Αν f(k) μια αλγεβρική πράξη που εμπλέκει το k, τότε ορίζεται το εξής: $\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + ... + f(n)$

δλδ θέτουμε πρώτα k=1 στην f(k)->f(1), για k=2 στην f(k)->f(2) και το προσθέτουμε στο f(1) άρα f(1)+f(2), k=3 στην f(k)->f(3) και το προσθέτουμε στο f(1)+f(2) άρα f(1)+f(2)+f(3), k=n στην f(k)->f(n) και το προσθέτουμε στο f(1) άρα f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)

Παραδείγματα: $\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + ... + x_n$ $\sum_{j=1}^{5} x^j = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

$$\sum_{i=0}^{5} a_i x^i = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$$

Άλγεβρα των Πινάκων

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Θα δείξουμε τον πολ/μο πινάκων ξεκινώντας από τον πολ/μο πινακα γραμμής με πίνακα στήλη.

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

Παραδείγματα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \end{bmatrix} = 32, \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = ?,$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = ?$$

Άλγεβρα των Πινάκων

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Και τώρα στη γενική του μορφή για πίνακες A=[a_{ik}], B=[b_{kj}] ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΟΙ ΣΤΗΛΕΣ ΤΟΥ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ ΜΕ ΤΙΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΤΟΥ ΑΛΛΟΥ ΠΙΝΑΚΑ. Αν A m x p και B p xn τότε το γινόμενο τους θα είναι ένας πίνακας, έστω C, με διαστάσεις m x n. Το στοιχείο ij του C λαμβάνεται απο πολ/μο της i-οστης γραμμής του A με την j-ιοστή στήλη του B, δλδ:

$$A_{mp}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix}, B_{pn}=\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}, A_{mp}\cdot B_{pn}=C_{mn}=\begin{bmatrix} c_{11} & . & . & . & c_{1n} \\ \dots & . & . & . & \dots \\ c_{i1} & . & c_{ij} & . & c_{in} \\ \dots & . & . & . & \dots \\ c_{m1} & . & . & . & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\cdot b_{kj}$$

Άλγεβρα των Πινάκων

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Παραδείγματα: Να υπολογιστούν τα γινόμενα AB και BA για καθε μια απο τις περιπτωσεις:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix},\ \ B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix},\ \ A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix},\ \ B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix},$$

$$A=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix},\ \ B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix},\ \ A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix},\ \ B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

Άλγεβρα των Πινάκων

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Στον πολ/μο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$(\vec{u}+\vec{v})\vec{w}=\vec{u}\,\vec{w}+\vec{v}\,\vec{w} \quad (A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$$

$$\vec{w}(\vec{u}+\vec{v})=\vec{w}\,\vec{u}+\vec{w}\,\vec{v}\ OXI\cdot C(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$$

$$(k\,\vec{u})\vec{v}=k\,(\vec{u}\,\vec{v}) \quad k\cdot(A\cdot B)=(k\cdot A)\cdot B=A(k\cdot B)$$

$$O\cdot A=A\cdot O=O$$

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης