ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ: Διανύσματα στους Rn, Cn, διανύσματα στο χώρο (3)

ΙΟΝΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Βλάμος Παναγιώτης

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Ιονίου Πανεπιστημίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Η νόρμα (norm) ή το μήκος ή το μέτρο ενός διανύσματος:

Η νόρμα ενός διανύσματος στον χώρο R^n συμβολίζεται $\left\|\vec{u}\right\|$ **και ορίζεται ως η μη-αρνητική τετραγωνική ρίζα του** $\vec{u}\,\vec{u}$

Για το διάνυσμα $\vec{u}=(u_{1,}\, u_{2,}\, \ldots,\, u_n)$ **είναι:**

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\vec{u}\,\vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

Δλδ η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των συνιστωσών του $\vec{u}$

Ένα διάνυσμα ονομάζεται μοναδιαίο εάν $\left\|\vec{u}\right\| = 1$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Για οποιοδήποτε μη-μηδενικό διάνυσμα του R^n το διάνυσμα

$$\hat{u} = \frac{1}{\left\|\vec{u}\right\|}\vec{u} = \frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}$$

Είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με το $\vec{u}$ **. Η διαδικασία εύρεσης του** $\hat{u}$ **ονομάζεται κανονικοποίηση του** $\vec{u}$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Διανύσματα στον R^n

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί το μέτρο των

$$\vec{u}=(1,2,3),\ \vec{v}=(4,5,6).\ \text{Ορίστε τα}\ \ \vec{u}+\vec{v},\ \vec{v}+\vec{u},\ \vec{u}-\vec{v},\ \vec{v}-\vec{u},$$
$$0\,\vec{u},\ 2\,\vec{u}+3\,\vec{v}$$

2) Ομοίως των $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Διανύσματα στον R^n

Παραδείγματα

1) Ποιο απο το παρακάτω είναι το μοναδιαίο διάνυσμα;

$$\vec{u}=(1,-3,4,2),\ \vec{v}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right)$$

2) Να γίνει η κανονικοποίηση των παραπάνω

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Διανύσματα στον R^n

Θεώρημα Schwarz: για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{u}\,,\vec{v}$ **στον χώρο** R^n**,**

ισχύει $\left\|\vec{u}\,\vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|$

Απόδειξη: Για κάθε πραγματικό αριθμό k ισχύει

$$0 \leq (t\,\vec{u}+\vec{v})(t\,\vec{u}+\vec{v}) = t^2(\vec{u}\,\vec{u})+2\mathrm{t}(\vec{u}\,\vec{v})+(\vec{v}\,\vec{v}) =$$

$$= \left\|\vec{u}\right\|^2 t^2 + 2\,t\,(\vec{u}\,\vec{v}) + \left\|\vec{v}\right\|^2.\ Av \left\|\vec{u}\right\|^2 = a\,,\,2\,(\vec{u}\,\vec{v}) = b\,,\,c = \left\|\vec{v}\right\|^2$$

Δλδ για καθε t $at^2 + bt + c \geq 0$. Τότε το πολυώνυμο δεν μπορεί να έχει 2 πραγμ. ρίζες, δλδ $0 \geq \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ ή $4\alpha\gamma \geq \beta^2$. Με αντικατάσταση προκύπτει η ανισότητα.

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Διανύσματα στον R^n

Θεώρημα Minkowski: για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ στον χώρο R^n, ισχύει $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$

$$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}) = (\vec{u}\,\vec{u}) + 2\,(\vec{u}\,\vec{v}) + (\vec{v}\,\vec{v})$$
$$\leq \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|^2 = \left(\left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|\right)^2, \delta\lambda\delta\ \left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Απόσταση, Γωνία και Προβολή διανυσμάτων στον R^n

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{u}\,,\vec{v}$ στον χώρο R^n, ισχύει ότι η απόστασή τους είναι

$$d(\vec{u}\,\vec{v})=\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\ldots(u_n-v_n)^2}$$

Η γωνία θ μεταξύ τους (προυπόθεση: μη-μηδενικά) ορίζεται ως

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\,\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}$$

και από την ανισότητα Schwarz ισχύει: $$-1\leq\cos\theta=\frac{\vec{u}\,\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}\leq 1$$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Απόσταση, Γωνία και Προβολή διανυσμάτων στον R^n

Και αν $\vec{u}\,\vec{v}=0$ τότε θ=90° . Να δειχτεί η σχέση του με τον ορισμό της ορθογωνικότητας.

Η προβολή ενός διανύσματος $\vec{u}$ πάνω σε ένα διάνυσμα $\vec{v}$ συμβολίζεται με

$$proj(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\,\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|^2}\vec{v}$$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Διανύσματα στον R^n

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί η απόσταση, η γωνία και η προβολή των

$$\vec{u}=(1,2,3),\ \vec{v}=(4,5,6).$$

2) Ομοίως των

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, Υπερεπίπεδα, Ευθείες, και καμπύλες στον R^n

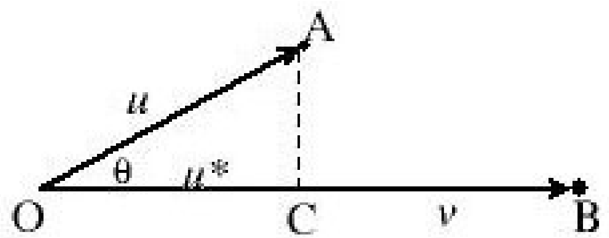
Θα προσπαθήσουμε να δείξουμε την διαφορά μίας n-άδας U(ai)≡ $U(a_1,a_2,...,a_n)$ θεωρούμενης ως σημείο του R^n, και μιας n-άδας $\vec{u} = \left[u_{1,}\ u_{2,.}\ ..,\ u_{n} \right]$ θεωρούμενης ως ένας διάνυσμα (γραμμή) από την αρχή των αξόνων και μέχρι το σημείο $c=(u_1,u_2,...,u_n)$.

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

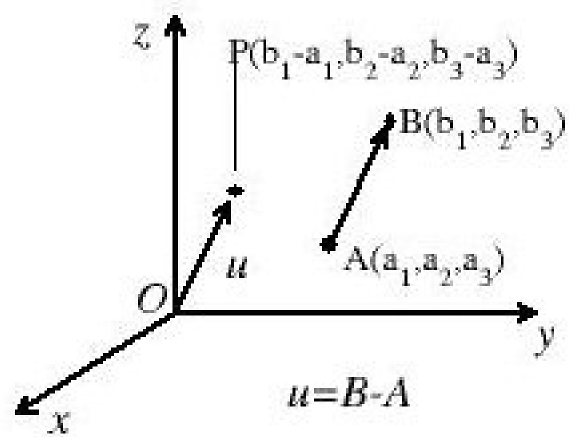
Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, Υπερεπίπεδα, Ευθείες, και καμπύλες στον R^n

Σε ένα οποιοδήποτε ζεύγος σημείων A(ai) και B(bi) στον Rn αντιστοιχεί το προσανατολισμένο διάνυσμα από το A στο B, δλδ το $\vec{AB}$



Η προβολή *u του *u* στο *v***



$$u=B-A=[b_1-a_1,b_2-a_2,\ldots,b_n-a_n]$$

Το $\vec{AB}$ ταυτίζεται με το *u* γιατί έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια φορά και διεύθυνση (δεξιό σχήμα).

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, **Υπερεπίπεδα**, Ευθείες, και καμπύλες στον R^n

Ένα υπερεπίπεδο H στον Rn είναι το σύνολο σημείων $(x_1,x_2,...,x_n)$ που ικανοποιεί μία γραμμική εξίσωση.

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b$$

όπου το $\vec{a}=[a_{1,}a_{2,}..,a_n]$ **δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα. Άρα ένα υπερεπίπεδο**

->Στον R^2 είναι μια ευθεία

->Στον R^3 ένα επίπεδο.

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, **Υπερεπίπεδα**, Ευθείες, και καμπύλες στον R^n

Θα δείξουμε ότι για τον R^3 το $\vec{a}=[a_{1,} a_{2,}.., a_n]$ **είναι ορθογώνιο προς οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα** $\vec{BC}$ **όπου τα $B(b_i)$, $C(c_i)$ είναι σημεία του H.**

Αφού τα B, C ανήκουν στο H θα ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=b$ και $a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n=b$ και το

$$\vec{v}=\vec{BC}=C-B=[c_1-b_{1,} c_2-b_{2,}.., c_n-b_n]$$

Για να είναι ορθογώνιο το $\vec{v}\,\pi\rho o\varsigma\ \ \tau o\ \vec{a}$ **θα πρέπει** $\vec{a}\,\vec{v}=0.$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, **Υπερεπίπεδα**, Ευθείες, και καμπύλες στον R^n

$$\vec{a}\,\vec{v} = a_1(c_1 - b_1) + a_2(c_2 - b_2) + \ldots + a_n(c_n - b_n) =$$
$$(a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_n c_n) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_2) = b - b = 0$$

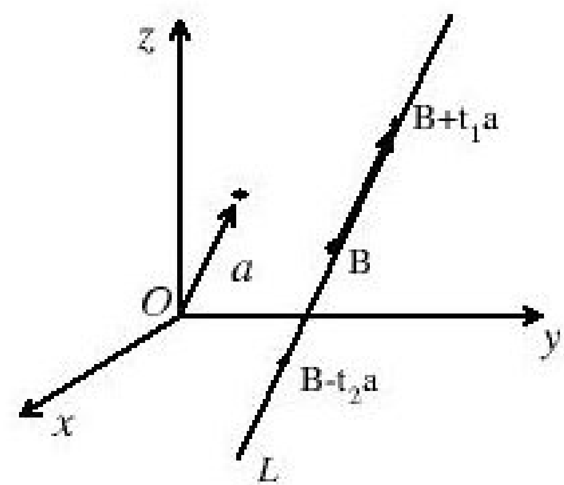
Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, Υπερεπίπεδα, **Ευθείες**, και καμπύλες στον R^n

Η ευθεία L στον R^n που διέρχεται από το σημείο $B(b_1,b_2,...,b_n)$ και έχει φορά και διεύθυνση του $\vec{a}=[a_{1,}\,a_{2,.}\,..,a_n]$ **αποτελείται από τα σημεία X=($x_1,x_2,...,x_n$)**

$$X = ta + B \quad ή \quad \begin{aligned} x_1 &= b_1 + ta_1 \\ x_2 &= b_1 + ta_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= b_n + ta_n \end{aligned} \quad ή \quad L(t) = (b_i + a_i t)$$



Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, Υπερεπίπεδα, **Ευθείες**, και καμπύλες στον R^n

Παράδειγμα: Έστω Η το επίπεδο R^3 που αντιστοιχεί στην

2x-5y+7z=4. Να δειχτεί η ορθοκανονικότητα του Η προς το (2,-5,7).

Λύση: Πρέπει να υπολογσίσουμε το διάνυσμα διεύθυνσης. Δύο λύσεις είναι

Α(1,1,1) και Β(5,4,2). Άρα είναι

$$\vec{v} = \vec{AB} = B - A = (2-1, -5-1, 7-1) = [4,3,1].$$

Το $\vec{u} = [2,-5,7]$ **για να είναι κανονικό προς το Η θα πρέπει** $\vec{u}\,\vec{v} = 0$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, Υπερεπίπεδα, **Ευθείες**, και καμπύλες στον R^n

Παράδειγμα: Να βρείτε μια εξίσωση του R^4 που διέρχεται από το B(1,3,-4,2) και είναι κανονικό προς το διάνυσμα $\vec{u}=[4,-2,5,6]$

Λύση: Κάθε εξίσωση του χώρου θα δίδεται από την $4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=k$.

Εφόσον διέρχεται από το B τότε 4 1 -2 3 +5 (-4) + 6 2= -10, δλδ κk=-10

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, Υπερεπίπεδα, **Ευθείες**, και καμπύλες στον R^n

Παράδειγμα: Να βρείτε μια εξίσωση του R^4 που διέρχεται από το B(1,2,3,-4) και έχει τη διεύθυνση του $\vec{u}=[5,6,-7,8]$ ποια η τιμή για t=1;

Λύση: Για την ευθεία θα ισχύει x1= 5t+1, x2= 6t+2, x3=-7t+3, x4=8t-4 ή L(t)=(x1= 5t+1, x2= 6t+2, x3=-7t+3, x4=8t-4). Για t=1 προκύπτει το C(6,8,-4,4), ενω για t=0;

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, Υπερεπίπεδα, Ευθείες, και **καμπύλες στον R^n**

Έστω ένα διάστημα D του R και μία συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε F:D->R^n δλδ μια καμπύλη του R^n. Άρα σε κάθε σημείο $t\in D$ το αντίστοιχο σημείο στον R_n είναι: $F(t)=[F_1(t),F_2(t),...,F_n(t)]$, ενώ η παράγωγος της F(όταν ορίζεται) οδηγεί στο διάνυσμα:

$$V(t)=\frac{dF(t)}{dt}=\left[\frac{dF_1(t)}{dt},\frac{dF_2(t)}{dt},...,\frac{dF_n(t)}{dt}\right]$$

το οποίο είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη. Η κανονικοποίηση του V(t) οδηγεί στο

$$T(t)=\frac{V(t)}{\left\|V(t)\right\|}$$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, Υπερεπίπεδα, Ευθείες, και **καμπύλες στον R^n**

Παράδειγμα: Έστω η καμπύλη F(t)=[sin(t),cos(t),t] στον R^3. Ποιό είναι το μοναδιαίο διάνυσμα;

Λύση: Η παράγωγος είναι V(t)=dF(t)/dt=[cos(t),-sin(t),1]. Στη συνέχεια κανονικοποιούμε το V(t), δλδ χρειαζόμαστε το ||V(t)||:

$||V(t)||^2=(\cos x)^2+(-\sin x)^2+(1)^2=2$, και το μοναδιαίο και εφαπτόμενο στην καμπύλη διάνυσμα είναι το:

$T(t)=V(t)/||V(t)||=[\cos(t),-\sin(t),1] * 2^{-1/2}=$...

Διανύσματα στον R^3, και η σημειογραφία ijk

Εισαγωγή

Για τα διανύσματα του R^3 χρησιμοποιείται μια ειδική σημειογραφία, η ijk όπου

$\vec{i}=[1,0,0]$ **συμβολίζει το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα x**

$\vec{j}=[0,1,0]$ **συμβολίζει το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα y**

$\vec{k}=[0,0,1]$ **συμβολίζει το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα z**

δλδ οποιοδήπτοε διάνυσμα του R^3 μπορεί να εκφραστεί μοναδικά στην μορφή: $\vec{u}=[u_{1,} u_{2,} u_3]=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$

Καθώς τα $\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\vec{k}$ **είναι ανά δύο ορθογώνια ισχύουν τα:**

$$\vec{i}\,\vec{i}=\vec{j}\,\vec{j}=\vec{k}\,\vec{k}=1$$

$$\vec{i}\,\vec{j}=\vec{j}\,\vec{k}=\vec{k}\,\vec{i}=0$$

Διανύσματα στον R^3, και η σημειογραφία ijk

Εισαγωγή

Ενώ, για τις πράξεις των διανυσμάτων μπορούμε να γράψουμε για τα:

$$\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}\,,\quad \vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$$

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1)\vec{i}+(u_2+v_2)\vec{j}+(u_3+v_3)\vec{k}$$

$$c\vec{v}=(c\,v_1)\vec{i}+(cv_2)\vec{j}+(cv_3)\vec{k}\quad c\in R$$

Επίσης και: $\vec{u}\,\vec{v}=(u_1v_1)+(u_2v_2)+(u_3v_3)$

$$\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{\vec{u}\,\vec{u}}=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$$

Διανύσματα στον R^3, και η σημειογραφία ijk

Εισαγωγή

Παράδειγμα: Για τα παρακάτω διανύσματα

$$\vec{u}=3\,\vec{i}+5\,\vec{j}-2\,\vec{k},\quad \vec{v}=4\,\vec{i}-8\,\vec{j}+7\,\vec{k}$$

να ορίσετε τα $i)\,\vec{u}+\vec{v},\; ii)\,3\,\vec{u}+2\,\vec{v},\; iii)\,\vec{u}\,\vec{v},\; iv)\,\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$

i) προσθέτουμε τις αντίστοιχες συνιστώσες.

ii) πολ/με με τους αριθμούς και ύστερα όπως (i)

iii) πρώτα πολ/με τις αντίστοιχες συνιστώσες και έπειτα τις προσθέτουμε.

iv) sqrt{3^2+5^2+$(-2)^2$} και sqrt{4^2+$(-8)^2$+7^2}

Διανύσματα στον R^3, και η σημειογραφία ijk

Εξωτερικό γινόμενο

Υπάρχει μια πράξη που ορίζεται για διανύσματα του R^n. Η πραξη αυτή ονομάζεται εξωτερικό γινόμενο και συμβολίζεται $\vec{u}\times\vec{v}$ και υπολογίζεται ως

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$(u_2 v_3-u_3 v_2)\vec{i}-(u_1 v_3-u_3 v_1)\vec{j}+(u_1 v_2-u_2 v_1)\vec{k}$$

1) Καλύπτουμε την πρώτη στήλη και υπολογίζουμε την ορίζουσα.

2) Μεταβάλουμε το πρόσημο σε μειον (-) και καλύπτουμε την δεύτερη στήλη και υπολογίζουμε την ορίζουσα.

3) Καλύπτουμε την τρίτη στήλη και υπολογίζουμε την ορίζουσα.

Το αποτέλεσμα είναι αριθμός ή διάνυσμα;

Ονομάζεται διανυσματικό γινόμενο των $\vec{u}$, $\vec{v}$

Διανύσματα στον R^3, και η σημειογραφία ijk

The Cross Product Between Two Vectors

Definition

Let u = ai + bj + ck and v = di + ej + fk be vectors then we define the cross product v x w by the determinant of the matrix:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

We can compute this determinant as:

$$\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}\mathbf{i} - \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix}\mathbf{j} + \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}\mathbf{k}$$

Διανύσματα στον R^3, και η σημειογραφία ijk

Εισαγωγή

Τα εξωτερικά γινόμενα των διανυσμάτων $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$

είναι: $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\,,\quad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\,,\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\,,\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$

$$\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j}\,,\quad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{j}$$

Θεώρημα: Έστω τα $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}$ **στον R^3**

α) Το διάνυσμα $\vec{u}\times\vec{v}$ **είναι ορθογώνιο τόσο ως προς το** $\vec{u}$ **όσο και ως προς το** $\vec{v}$

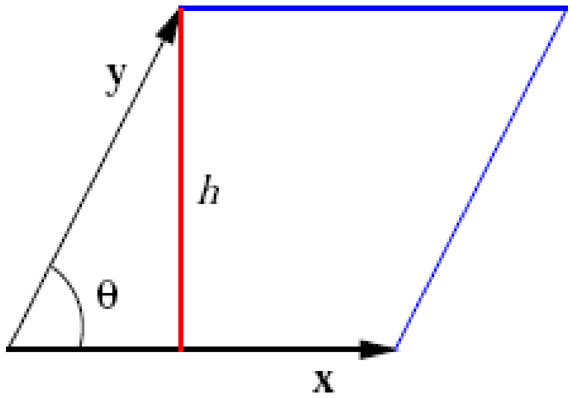
β) Η απόλυτη τιμή του τριπλού γινομένου $\vec{u}\,\vec{v}\times\vec{w}$ **αναπαριστά τον όγκο παρελληλεπιπέδου. Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου είναι το**

$$\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\sin\theta$$

Διανύσματα στον R^3, και η σημειογραφία ijk

Το εξωτερικό γινόμενο ισούται με το εμβαδό του παραλληλογράμμου

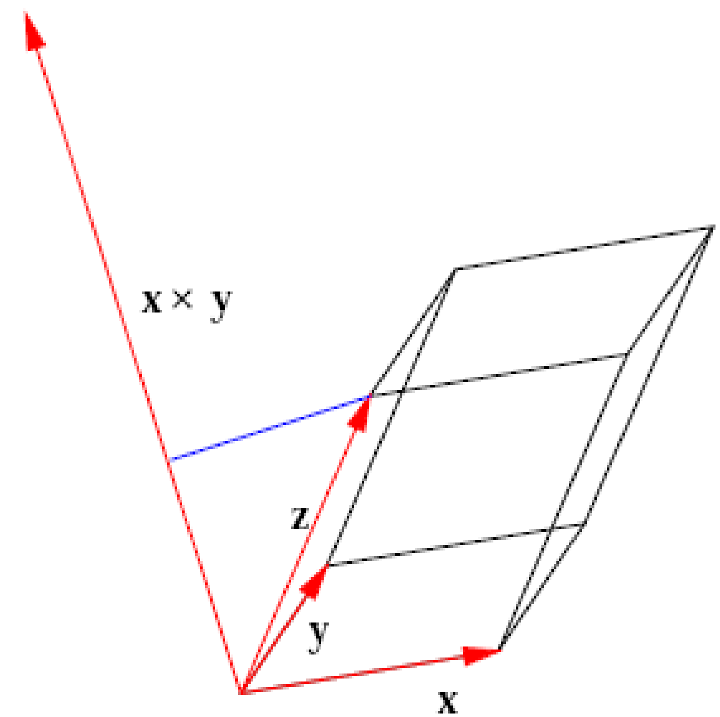
Έστω δύο διανύσματα X, y και θ η γωνία π
σχηματίζουν. Η κάθετος από το y στο x ορί
ύψος h και μάλιστα h=y sinθ. Το εμβαδό είν
E=βυ=|X||h|=|x||y| sinθ=|X *x* y|.



Διανύσματα στον R^3, και η σημειογραφία ijk

Το τριπλό γινόμενο ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου

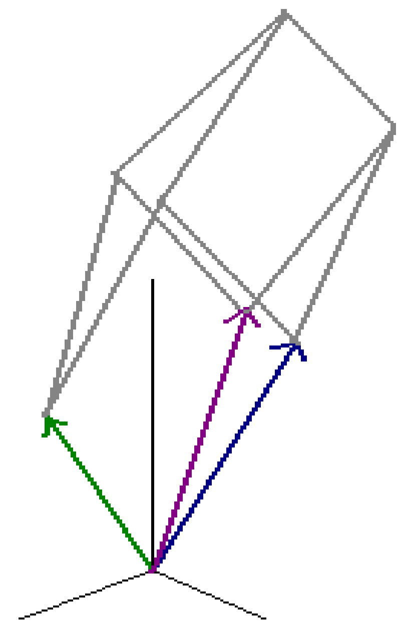
Αν προβάλουμε το z πάνω στο (d=X x y) (δλ
στο κάθετο διάνυσμα που προκύπτει από το
εξωτερικό γινόμενο των X και y, τότε αν φ η
γωνία που σχηματίζει το z με το d, θα είναι
z_1=z cosφ. Αυτό το z1 θα είναι ταυτόχρονα κα
ύψος (h) του παρελληλεπίδου (δλδ η κάθετο
“κορυφη” z στην βάση που ορίζεται από τα X
Ο όγκος είναι V=Eh=|X x y||h|=|X x y||z|cos φ
αποτελεί το εσωτερικό γινόμενο των διανυσματων
(X x y) και του z, δλδ V=|(X x y) z|



Διανύσματα στον R^3, και η σημειογραφία ijk

Geometry and the Cross Product

Parallelepipeds



To find the volume of the parallelepiped spanned by three vectors u, v, and w, we find the triple product:

Volume = u . (v x w)

This can be found by computing the determinate of the three vectors

$$\left|\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}\right|$$

Geometry and the Cross Product

Parallelepipeds

Example

Find the volume of the parallelepiped spanned by the vectors

u = <1,0,2> v = <0,2,3> w = <0,1,3>

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right| = 3$$

Διανύσματα στον R^3, και η σημειογραφία ijk

Εισαγωγή

Μιγαδικοί αριθμοί: Το σύνολο των μιγαδικών συμβολιζεται με C. Τυπικά ένας μιγαδικός είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος (a,b) πραγματικών αριθμών., οπου η ισότητα, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ορίζονται ως:

(a.b) = (c,d) αν και μόνο αν a=c και b=d

(a.b) + (c,d) = (a+c.b+d)

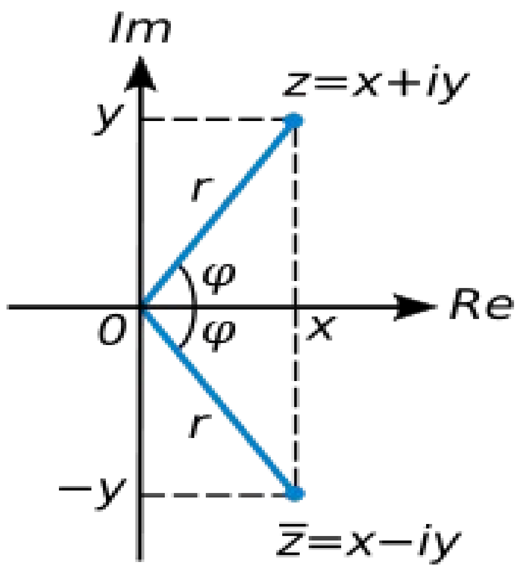
(a.b)   (c,d) = (ac-bd,ad+bc)

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

$$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

$$\frac{(a+bi)}{(c+di)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$



Διανύσματα στον R^3, και η σημειογραφία ijk

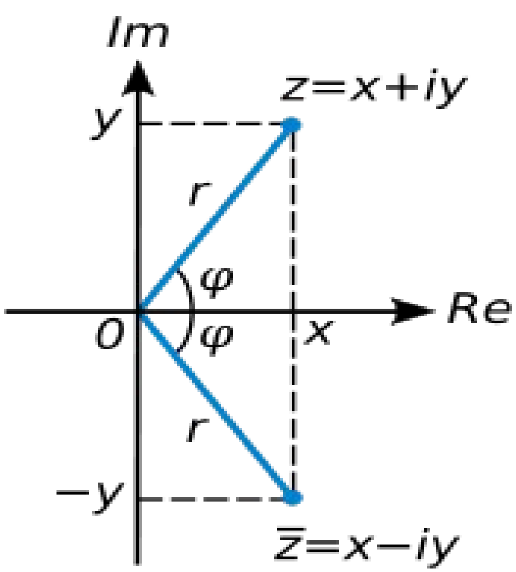
Εισαγωγή

Ο μιγαδικός αριθμός i συμβολίζεται με (0,1) και έχει την ιδιότητα

i^2=ii=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1 ή i=sqrt(-1)

Κατά συνέπεια κάθε μιγαδικός z=(a,b) μπορεί να γραφτεί ως

z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,b)(0,1)=a+bi με Rez≡a, Imz≡b



$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$
$$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i$$
$$\frac{(a+bi)}{(c+di)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

Τέλος Ενότητας