

Γραφικά Υπολογιστών

Ιόνιο Πανεπιστήμιο
Τμήμα Πληροφορικής

Στέργιος Παλαμάς, Επίκουρος Καθηγητής



Μάθημα 11:

Μετασχηματισμοί 3D

Affine Transformations

2D

$$\begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3x3

3D

$$\begin{bmatrix} a & d & g & j \\ b & e & h & k \\ c & f & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4x4

homogeneous coordinates

Είχαμε καταφέρει στους 2D μετασχηματισμούς να εκφράσουμε τα translation, rotation και scaling με 3x3 πίνακες.

Κατ' αναλογία, στις 3 διαστάσεις θα χρειαστούμε πίνακες 4x4

Affine Transformations

2D

$$\begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3x3

3D

$$\begin{bmatrix} a & d & g & j \\ b & e & h & k \\ c & f & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4x4

homogeneous coordinates

Είχαμε καταφέρει στους 2D μετασχηματισμούς να εκφράσουμε τα translation, rotation και scaling με 3x3 πίνακες.

Κατ' αναλογία, στις 3 διαστάσεις θα χρειαστούμε πίνακες 4x4

Scale

2D

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3x3

3D

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4x4

Για το Scaling η μορφή του πίνακα 3D είναι ανάλογη με αυτή του 2D, με την προσθήκη μιας πρόσθετης τρίτης κλιμάκωσης κατά τον άξονα z.

Translation

2D

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3x3

3D

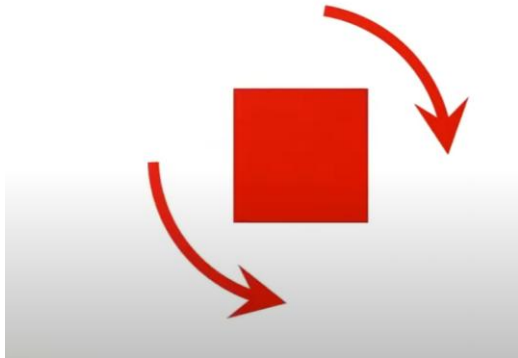
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4x4

homogeneous coordinates

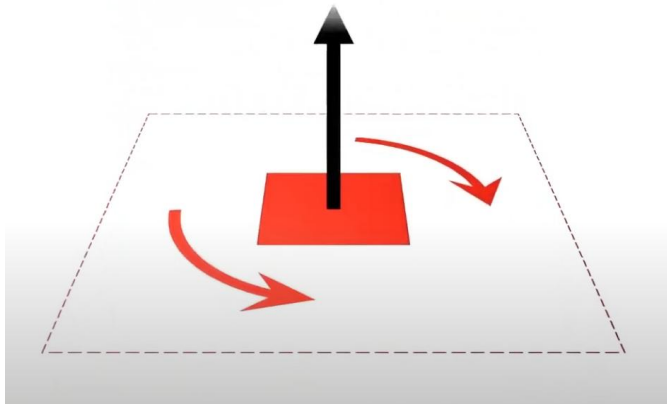
Η μετατόπιση (translation) επίσης εκφράζεται με έναν πίνακα 4x4, ανάλογο με αυτόν του 2D, με την προσθήκη μιας επιπλέον μετατόπισης κατά τον άξονα z.

Rotation



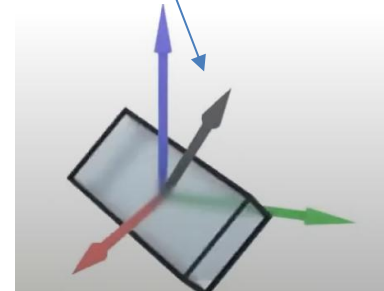
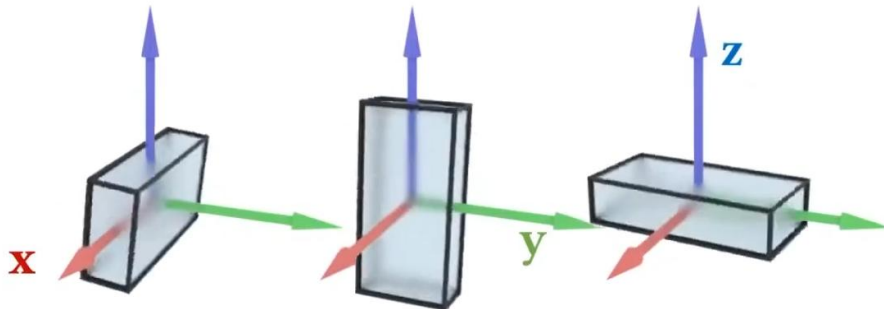
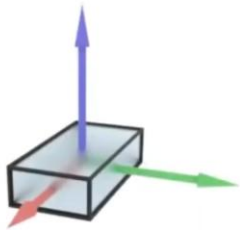
Στην περιστροφή (rotation) όμως τα πράγματα δεν είναι το ίδιο απλά.

Ενώ στις 2 διαστάσεις (2d) η περιστροφή μπορούσε να γίνει πάνω στην επιφάνεια, μόνο ως προς έναν άξονα (κάθετο) είτε δεξιόστροφα, είτε αριστερόστροφα

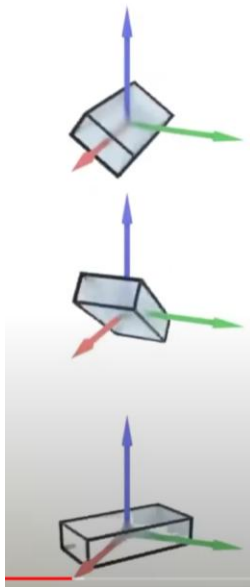


Rotation

... στις τρεις διαστάσεις, η περιστροφή μπορεί να είναι γύρω από οποιονδήποτε άξονα (x , y , z) αλλά και γενικότερα γύρω από οποιονδήποτε άξονα-διάνυσμα.



Rotation



$R_x :$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_y :$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_z :$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

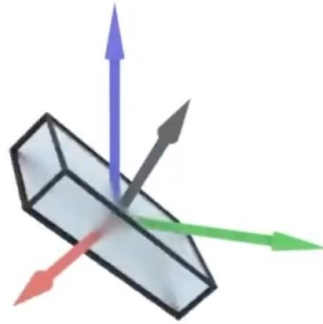
Στον πίνακα περιστροφής γύρω από τον x η πρώτη γραμμή είναι $1 \ 0 \ 0 \ 0$ καθώς οι συντεταγμένες x των σημείων δεν αλλάζουν όταν η περιστροφή είναι γύρω από τον άξονα x .

Αντίστοιχα στον πίνακα περιστροφής γύρω από τον y , η γραμμή 2 είναι $0 \ 1 \ 0 \ 0$ καθώς οι συντεταγμένες y των σημείων δεν αλλάζουν στην περιστροφή γύρω από τον y

Και αντίστοιχα στην περιστροφή γύρω από τον z

Οι πίνακες περιστροφής γύρω από τους άξονες x, y, z έχουν ανάλογη μορφή με τους 2D. Τα ημίτονα και συνημίτονα μπαίνουν στις γραμμές των αξόνων που οι συντεταγμένες αλλάζουν κατά την περιστροφή.

Rotation



$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_x(\gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Η Περιστροφή γύρω από οποιονδήποτε άξονα μπορεί να αναλυθεί σε μια:

- περιστροφή κατά γ γύρω από τον $x - R_x(\gamma)$
- περιστροφή κατά β γύρω από τον $y - R_y(\beta)$
- περιστροφή κατά α γύρω από τον $z - R_z(\alpha)$

Οπότε ο συνολικός πίνακας περιστροφής έχει την παραπάνω μορφή. **Προσοχή** : Η σειρά περιστροφών στην παραπάνω σχέση είναι σημαντική. Πρώτα εκτελείται η περιστροφή κατά x , μετά κατά y και τέλος κατά z .

Rotation

$$\mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_x(\gamma)$$

$$\neq \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{R}_x(\gamma)$$

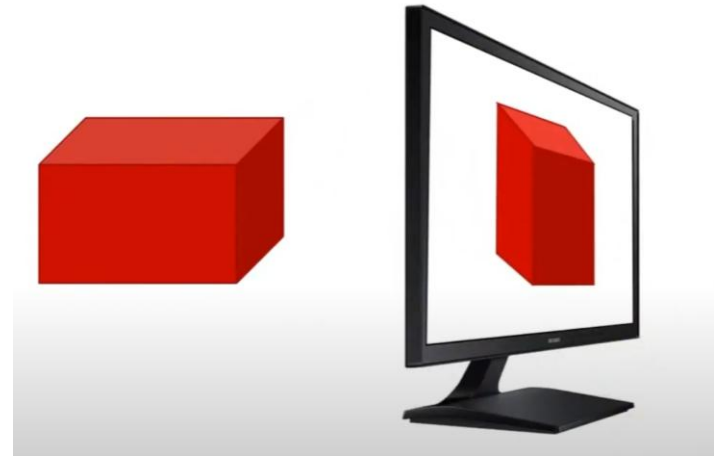
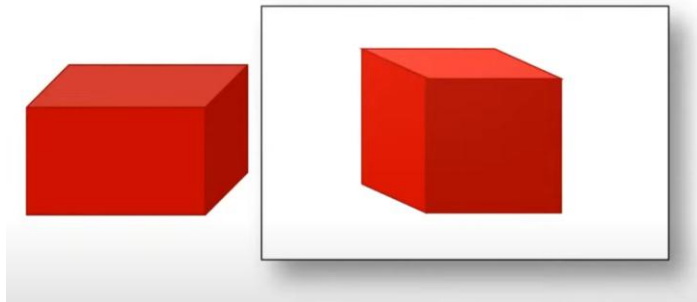
$$\neq \mathbf{R}_x(\gamma) \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta)$$

$$\neq \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{R}_x(\gamma) \mathbf{R}_y(\beta)$$

$$\neq \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_x(\gamma) \mathbf{R}_z(\alpha)$$

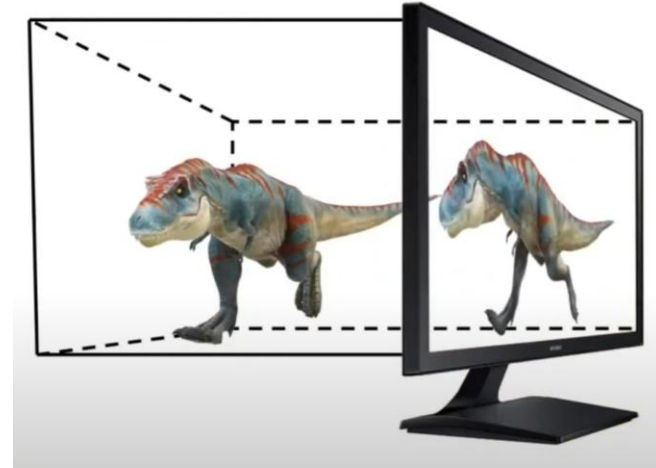
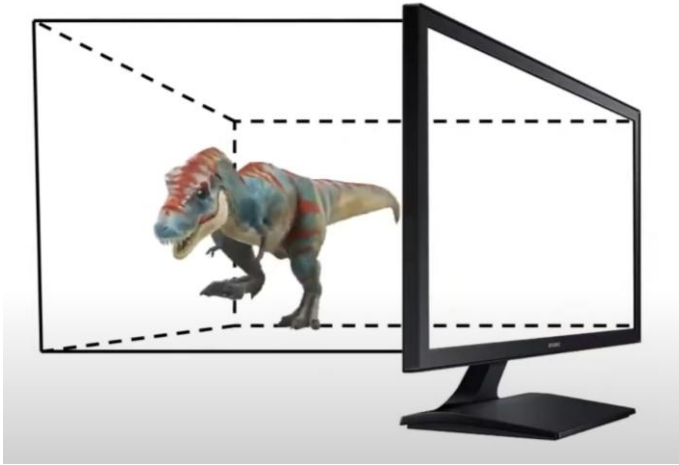
$$\neq \mathbf{R}_x(\gamma) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_z(\alpha)$$

Projection Transformations



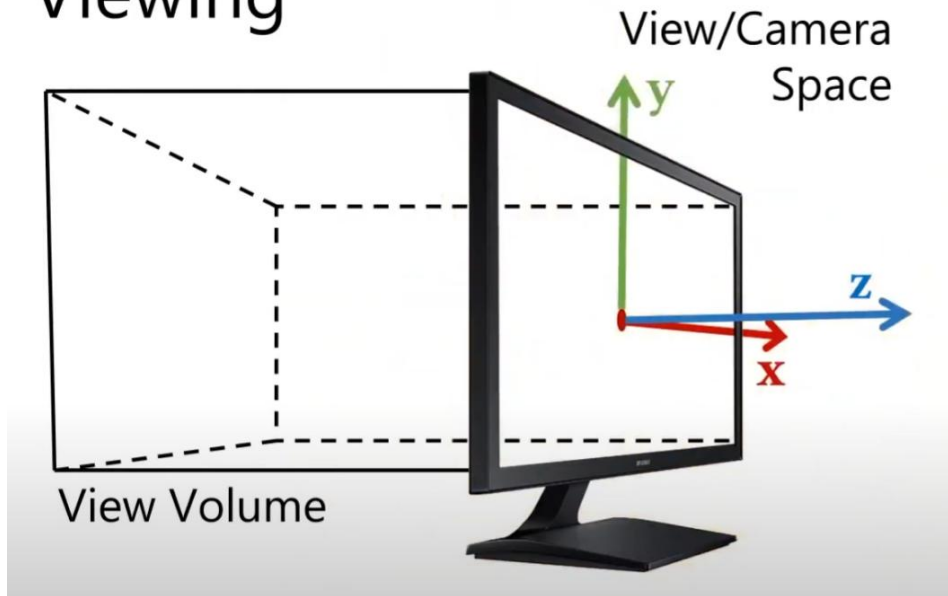
Το ζητούμενο στο rendering μιας 3D σκηνής είναι να απεικονιστεί στη δισδιάστατη οθόνη μας, μια αναπαράσταση της 3D σκηνής από μια συγκεκριμένη οπτική γωνία παρατήρησης (κάμερα).

Viewing



Είναι σαν πίσω από την οθόνη μας να υπάρχει ένα εικονικό 3D περιβάλλον και με κάποιον τρόπο να πρέπει να πάρω μια απεικόνισή του , μια προβολή του από συγκεκριμένη οπτική γωνία στην οθόνη.

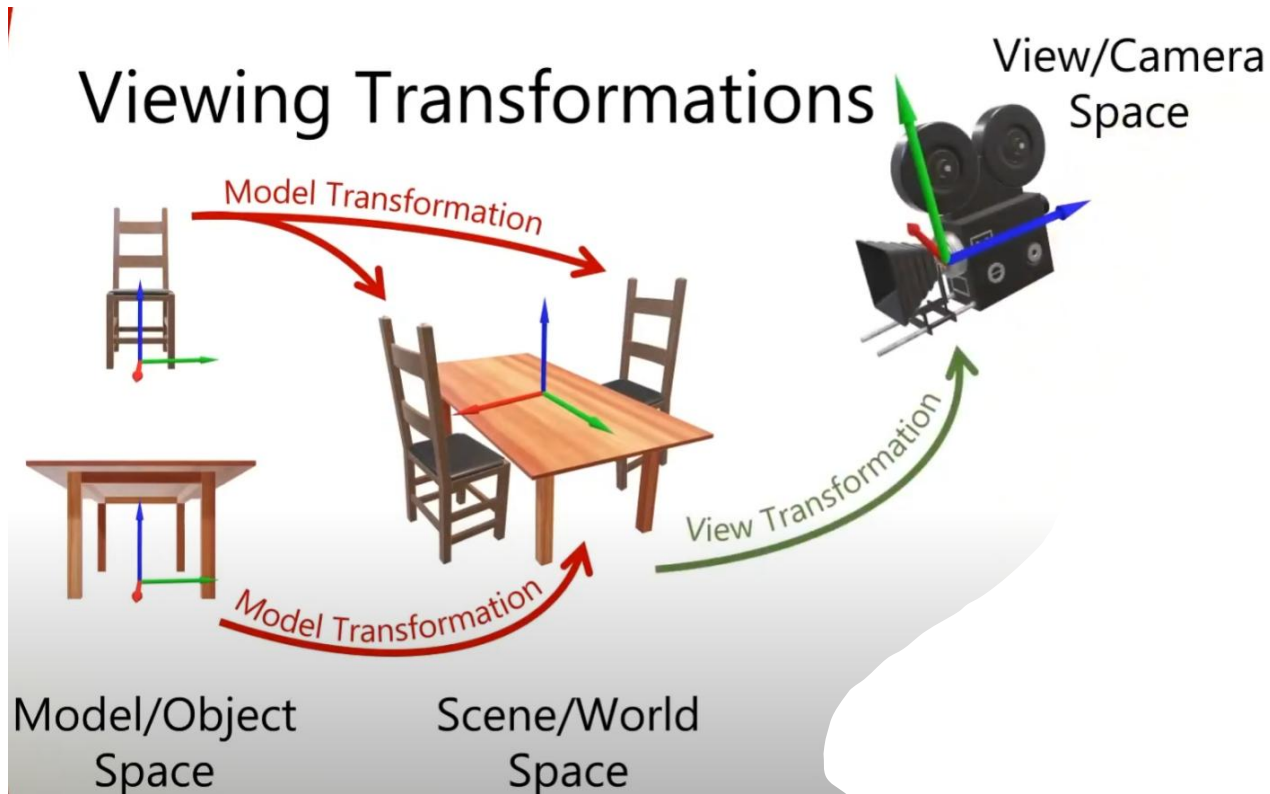
Viewing



Ορίζουμε λοιπόν ένα σύστημα συντεταγμένων στην οθόνη μας όπως φαίνεται παραπάνω (**View/Camera Space**).

Τη διεύθυνση του x και y την βάζουμε όπως έχουμε συνηθίσει να δουλεύουμε στις 2 διαστάσεις οπότε το z αντιπροσωπεύει το βάθος.

Ο ορατός στην κάμερα (και επομένως στην οθόνη) τρισδιάστατος χώρος ονομάζεται **View Volume**

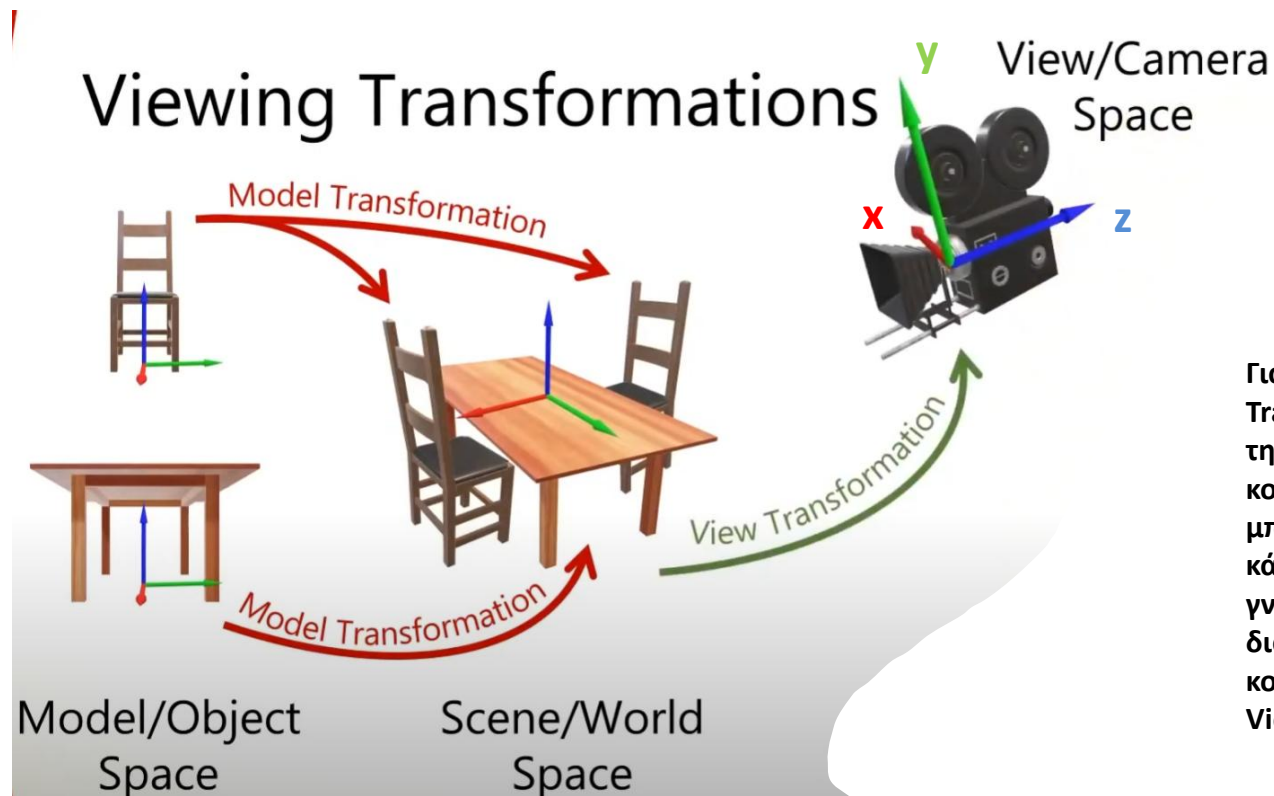


Τα τρισδιάστατα μοντέλα που χρησιμοποιούμε είναι σχεδιασμένα στο δικό τους σύστημα συντεταγμένων (**Model/Object Space**).

Όταν τα τοποθετούμε στη σκηνή, τα μετακινούμε, τα περιστρέφουμε, τα μεγαλώνουμε ή μικραίνουμε (scale) και πλέον ανήκουν στο **Scene/World Space**. Η Σκηνή έχει το δικό της σύστημα συντεταγμένων.

Τη σκηνή εμείς την παρακολουθούμε/ζωγραφίζουμε μέσω μιας «Κάμερας» η οποία έχει το δικό της σύστημα συντεταγμένων (**View/Camera Space**).

Με τους κατάλληλους μετασχηματισμούς λοιπόν πάμε από το **Model/Object Space** στο **Scene/World Space** και μετά στο **View/Camera Space** για να απεικονίσουμε τη σκηνή σε οθόνη.



Για να ορίσουμε το «View Transformation», ορίζουμε τη θέση της κάμερας, την κατεύθυνση που κοιτάει ($-z$) και το διάνυσμα y . Μετά μπορούμε να βρούμε τη θέση της κάμερας στο World Space και γνωρίζοντας και τα δύο παραπάνω διανύσματα (y και κατεύθυνση που κοιτάει) μπορούμε να φτιάξουμε το View Transformation

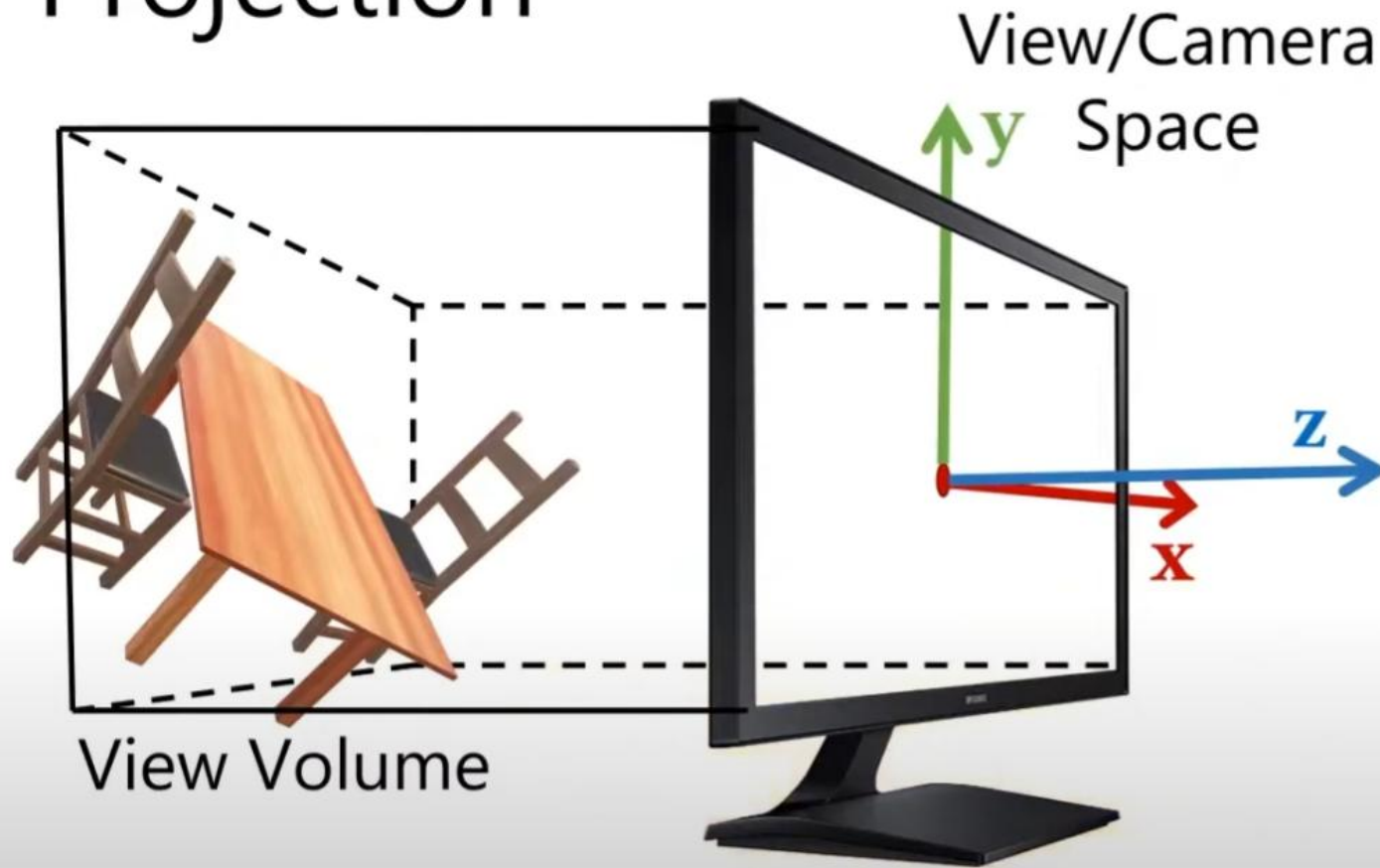
Τα τρισδιάστατα μοντέλα που χρησιμοποιούμε είναι σχεδιασμένα στο δικό τους σύστημα συντεταγμένων (**Model/Object Space**).

Όταν τα τοποθετούμε στη σκηνή, τα μετακινούμε, τα περιστρέφουμε, τα μεγαλώνουμε ή μικραίνουμε (scale) και πλέον ανήκουν στο **Scene/World Space**. Η Σκηνή έχει το δικό της σύστημα συντεταγμένων.

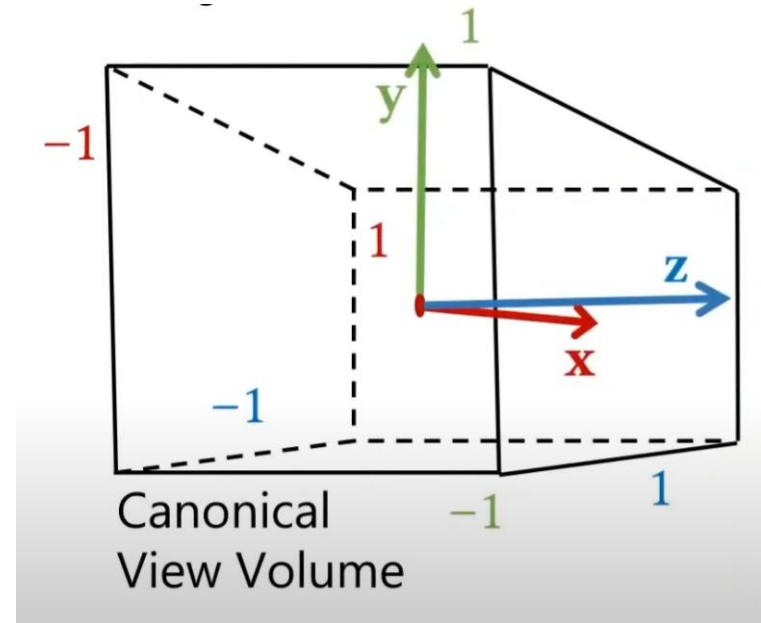
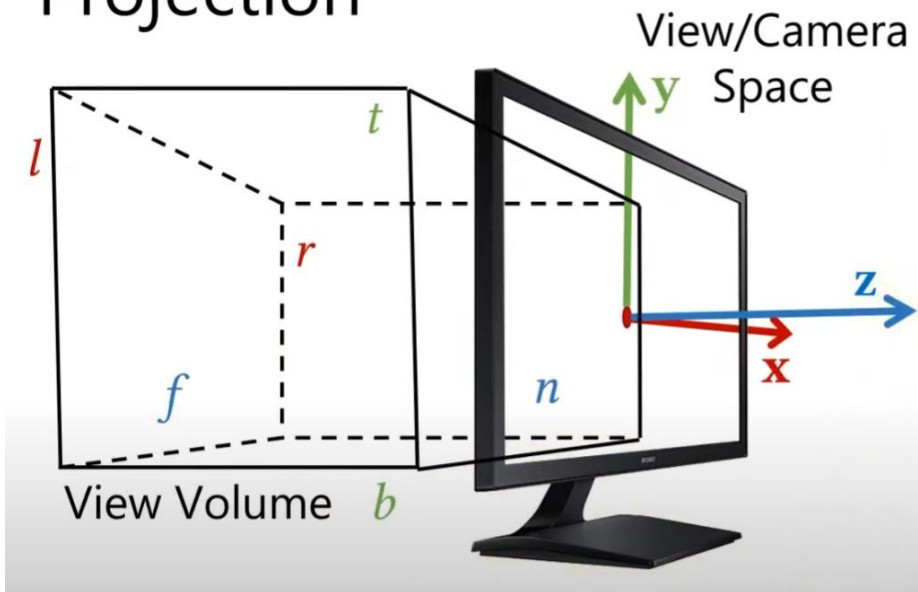
Τη σκηνή εμείς την παρακολουθούμε/ζωγραφίζουμε μέσω μιας «Κάμερας» η οποία έχει το δικό της σύστημα συντεταγμένων (**View/Camera Space**).

Με τους κατάλληλους μετασχηματισμούς λοιπόν πάμε από το **Model/Object Space** στο **Scene/World Space** και μετά στο **View/Camera Space** για να «ζωγραφίσουμε» τη σκηνή σε οθόνη.

Projection



Projection



Για να ορίσουμε το View Volume , ορίζουμε σε κάθε άξονα μια ελάχιστη και μια μέγιστη τιμή:

Άξονας x : Ελάχιστη l (left) $\rightarrow$ Μέγιστη r (right)

Άξονας y : Ελάχιστη b (bottom) $\rightarrow$ Μέγιστη t (top)

Άξονας z : Ελάχιστη f (far) $\rightarrow$ Μέγιστη n (near)

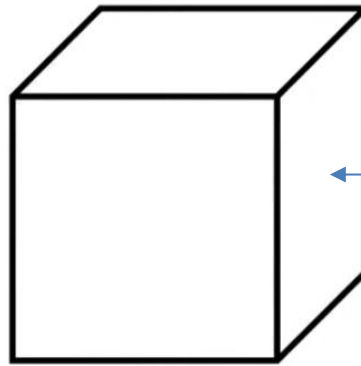
Αυτό θα είναι το View Volume και ό,τι περιέχεται μέσα σε αυτό στη σκηνή θα ζωγραφίζεται στην οθόνη.

Στο κανονικοποιημένο (canonical) View Volume στη συνέχεια , θέτουμε -1 στην ελάχιστη και 1 στη μέγιστη συντεταγμένη σε κάθε πλευρά.

Projection



View/Camera
Space



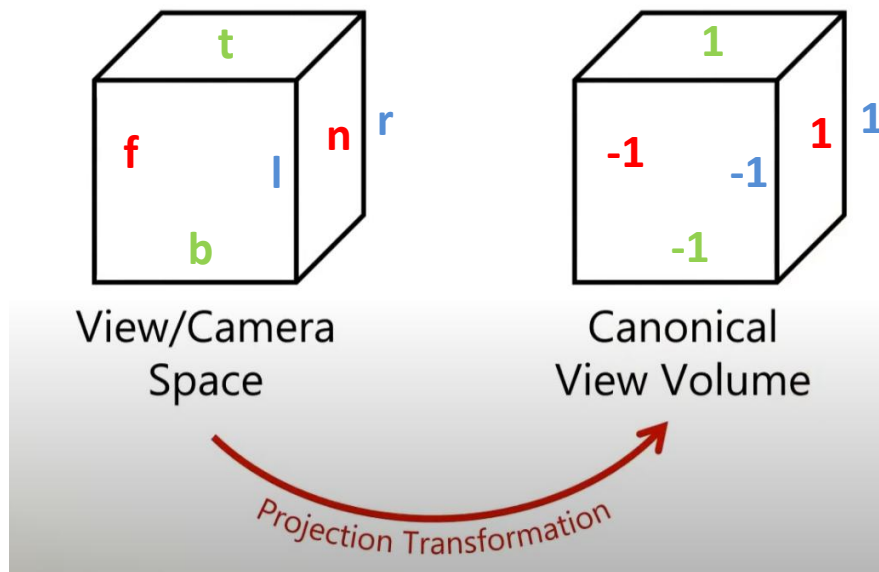
Canonical
View Volume



Η τελική εικόνα θα σχηματιστεί σε αυτή την πλευρά. Κρατάμε ωστόσο και τα δεδομένα βάθους (z data) για να χρησιμοποιηθούν για άλλες διεργασίες

Projection ονομάζουμε τη μετατροπή του Camera Space στο Canonical View Volume

Orthographic Projection



Στην ορθογραφική προβολή παίρνουμε το Camera Space και το μετασχηματίζουμε στο Canonical View Volume.

Orthographic Projection

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

← Συντεταγμένες στο Camera Space

↙ Συντεταγμένες στο Canonical View Volume

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Την τελευταία γραμμή τη χρησιμοποιούμε πάντα για τις ομοιογενείς συντεταγμένες ώστε να μπορούμε να εκφράσουμε και το Translation με πίνακες

Projection Transformations

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & 0 & 0 & ? \\ 0 & ? & 0 & ? \\ 0 & 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Πηγαίνοντας από το Camera Space στο Canonical Space, στην ορθογραφική προβολή, παρατηρούμε ότι οι άξονες x, y, z είναι ευθυγραμμισμένοι στα δύο spaces. **Δε θα χρειαστούμε λοιπόν περιστροφές.**

Projection Transformations

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & \frac{-2l}{r-l} - 1 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & \frac{-2b}{t-b} - 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & \frac{-2n}{f-n} - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Scaling στον x άξονα = $\frac{\text{Πλάτος του Canonical Volume}}{\text{Πλάτος του View Volume}} = \frac{1 - (-1)}{r-l} = \frac{2}{r-l}$

Scaling στον y άξονα = $\frac{\text{Πλάτος του Canonical Volume}}{\text{Πλάτος του View Volume}} = \frac{1 - (-1)}{t-b} = \frac{2}{t-b}$

Scaling στον z άξονα = $\frac{\text{Πλάτος του Canonical Volume}}{\text{Πλάτος του View Volume}} = \frac{1 - (-1)}{f-n} = \frac{2}{f-n}$

Projection Transformations

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & \frac{-2l}{r-l} - 1 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & \frac{-2b}{t-b} - 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & \frac{-2n}{f-n} - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Μετατόπιση στον x άξονα

Μετατόπιση στον y άξονα

Μετατόπιση στον z άξονα

Παρατηρούμε πχ ότι :

- αν $x = l$ (left) τότε $x' = 2l/(r-l) - 2l/(r-l) - 1 = -1$
- ενώ αν $x = r$, τότε $x' = 2r/(r-l) - 2l/(r-l) - 1 = 2(r-l)/(r-l) - 1 = 1$

Οπότε βλέπουμε ότι το mapping του left $\rightarrow$ right του View Volume γίνεται σωστά στο $-1 \rightarrow 1$ του canonical volume

Projection Transformations

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & \frac{-2l}{r-l} - 1 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & \frac{-2b}{t-b} - 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & \frac{-2n}{f-n} - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εναλλακτικά ο πίνακας μετασχηματισμού του orthographic projection μπορεί να γραφεί και έτσι .

πχ

$$\begin{aligned} -2l/(r-l) - 1 &= -2l/(r-l) - (r-l)/(r-l) = \\ &= (-2l - r + l) / (r-l) = (-l-r)/(r-l) = -(l+r)/(r-l) \end{aligned}$$

Projection Transformations



Orthographic
projection

Η ορθογραφική προβολή δεν περιέχει καθόλου προοπτική, οπότε δεν είναι σύμφωνη με τον τρόπο που βλέπουμε τρισδιάστατα.

Οι παράλληλες γραμμές παραμένουν παράλληλες.



Orthographic
projection

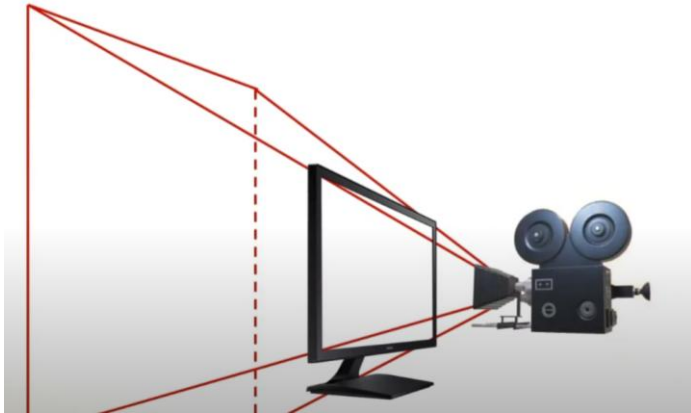


Perspective
projection

Η perspective projection παράγει ένα πολύ πιο φυσικό τρόπο απεικόνισης των 3D αντικειμένων, με προοπτική βάθους, παρόμοια με τον τρόπο που βλέπουμε στην καθημερινή μας ζωή.

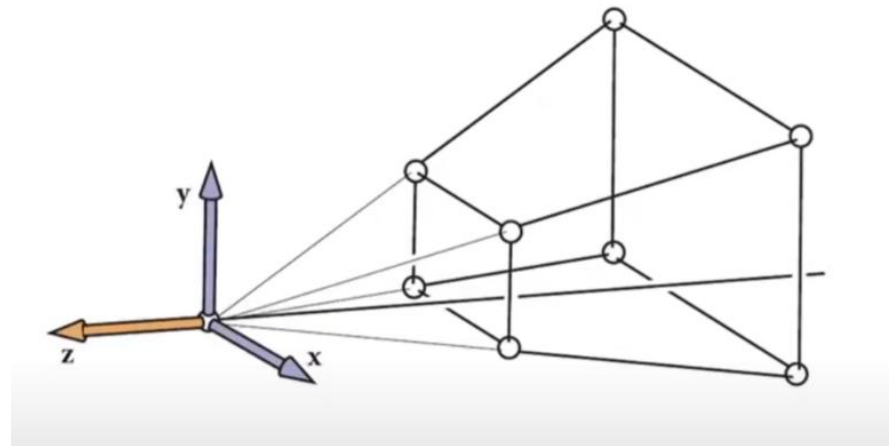
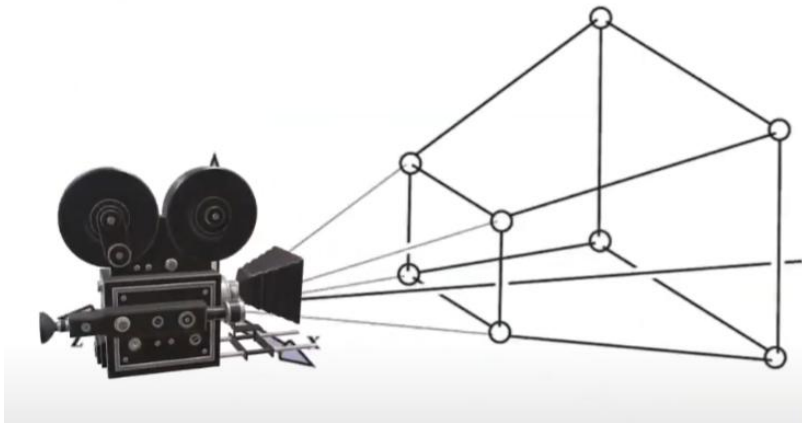
Projection Transformations

Perspective Projection



Ο λόγος που βλέπουμε με προοπτική είναι ότι τα μάτια μας έχουν μικρή επιφάνεια (το ίδιο και οι φακοί των καμερών).

Το οπτικό πεδίο μοιάζει με τραπέζιο και όχι με ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που βλέπαμε στο orthographic projection.



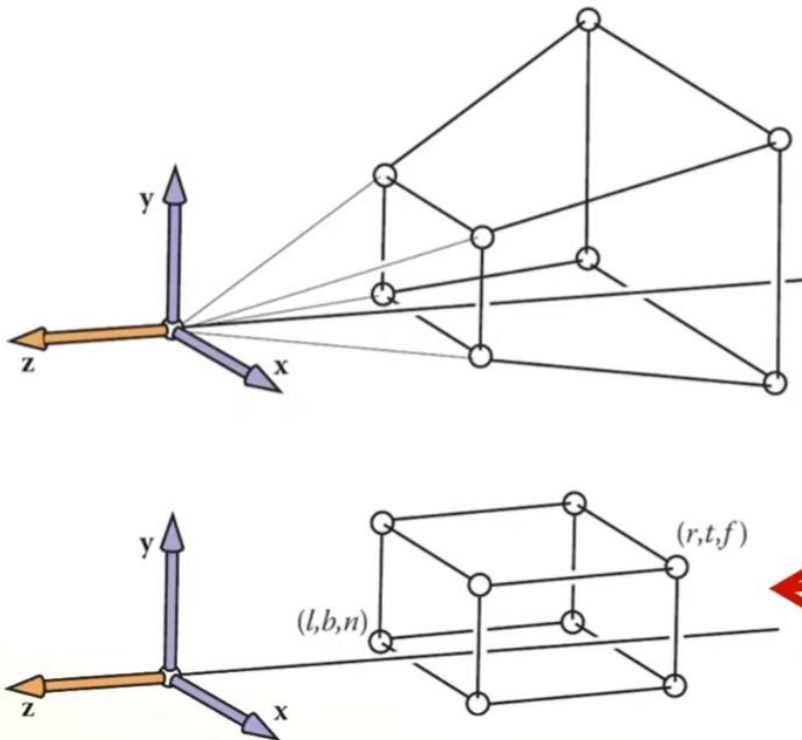
Perspective Projection

Σκοπός λοιπόν του **Perspective Projection** είναι να μετασχηματίσω το τραπέζιο σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο το οποίο μπορώ να χειριστώ όπως στο orthographic projection.

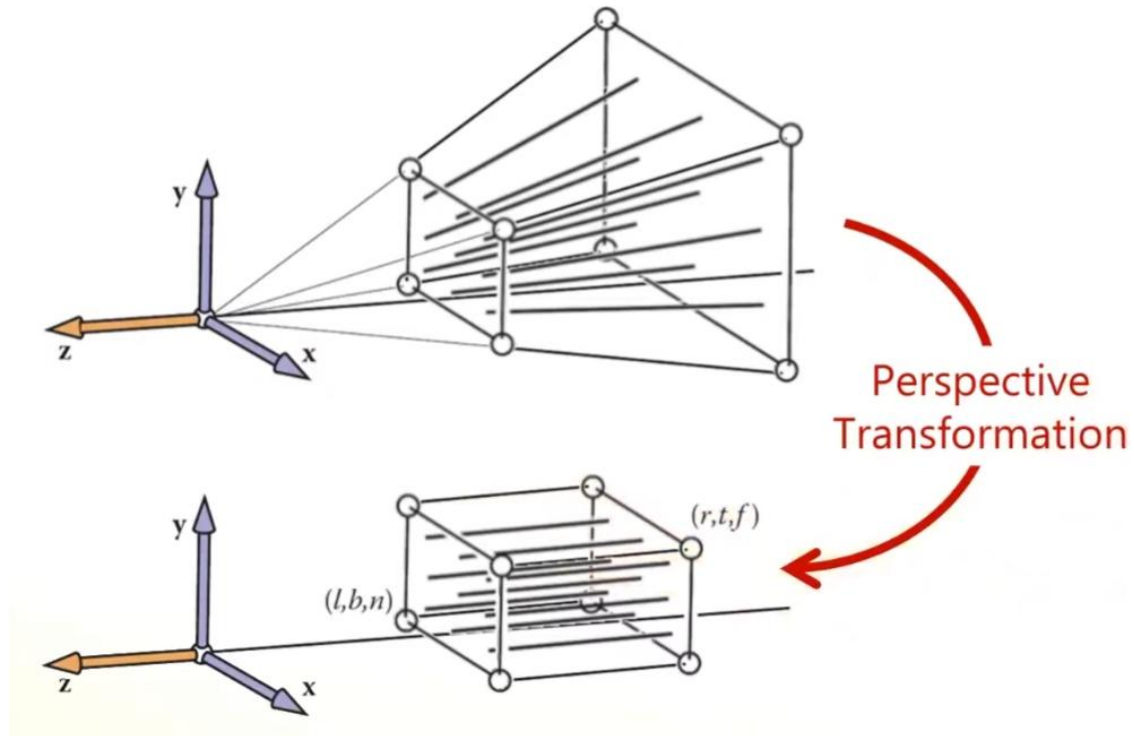
Ουσιαστικά λοιπόν εφαρμόζουμε **Perspective Transformation** για να εισάγουμε μια παραμόρφωση προοπτικής και στη συνέχεια κάνουμε **orthographic projection**.

Αυτό ονομάζουμε συνολικά ως «**Perspective Projection**»

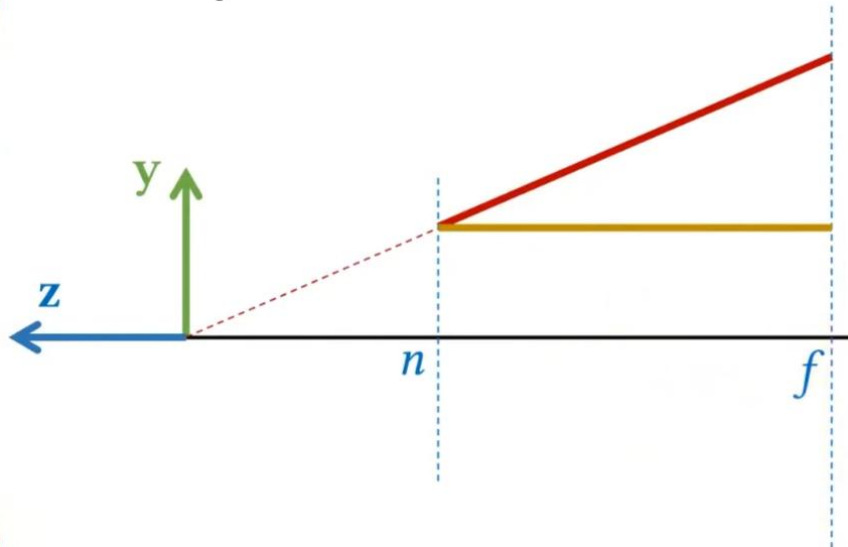
Perspective
Transformation



Perspective Projection

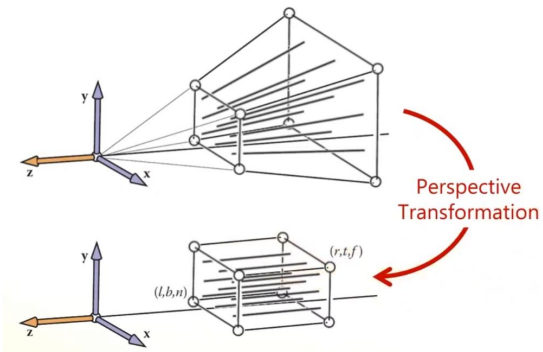


Perspective Transformation

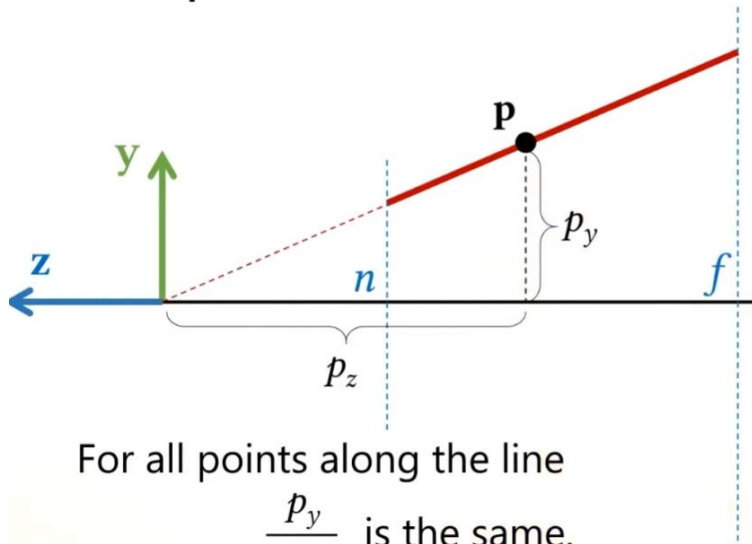


Σκοπός μας με το Perspective Transformation είναι να μετατρέψουμε την κεκλιμένη «ακτίνα» σε οριζόντια.

Perspective Projection



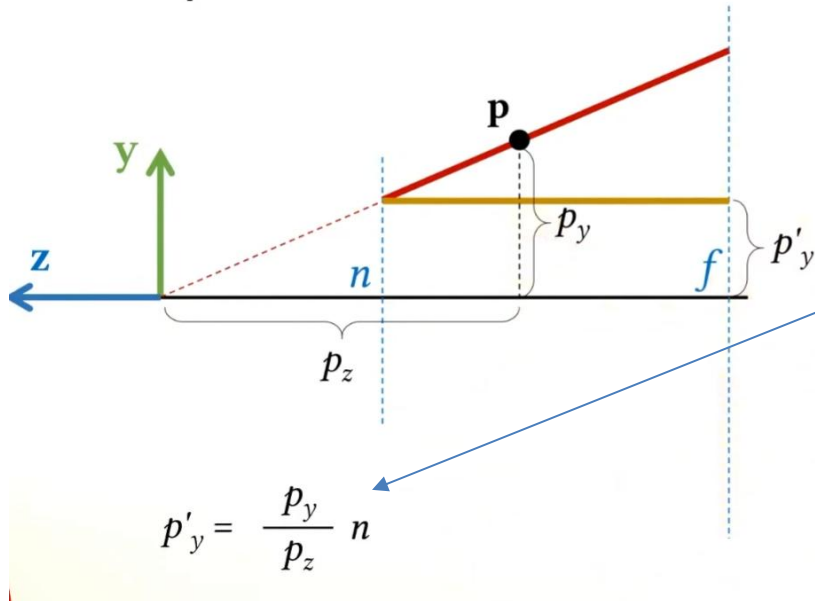
Perspective Transformation



Αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο p κατά μήκος του κεκλιμένου τμήματος, οι συντεταγμένες του P_y και P_z θα έχουν σταθερό λόγο. Δηλαδή το P_y/P_z παραμένει σταθερό σε όλο το μήκος .

Αυτό συμβαίνει αφού ο λόγος P_y/P_z είναι η εφαπτομένη της γωνίας που δεν αλλάζει αφού η γωνία είναι η ίδια.

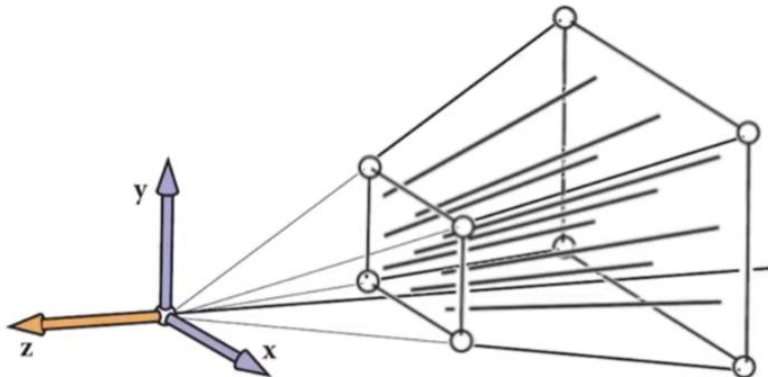
Perspective Transformation



Μετασχηματίζοντας το κεκλιμένο τμήμα στο παράλληλο, όλα τα σημεία του παράλληλου τμήματος θα έχουν το ίδιο y ($P'y$).

Το $P'y$ δίνεται από τον τύπο $(Py/Pz) n$, αφού :

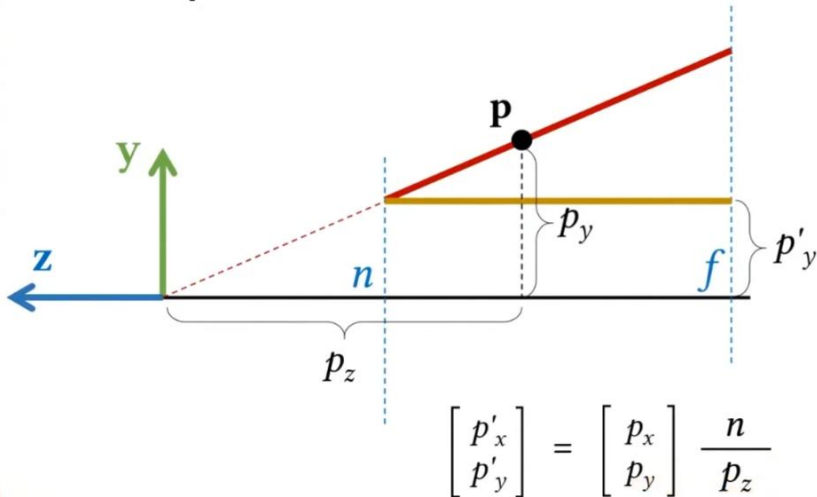
$$Py/Pz = P'y/n \rightarrow P'y = n * (Py/Pz)$$



Αυτό που περιγράψαμε στο επίπεδο YZ ισχύει συμμετρικά και στο επίπεδο XZ καθώς τα κεκλιμένα τμήματα συγκλίνουν προς το κέντρο και ως προς το YZ και ως προς το XZ.

$$p'_y = \frac{p_y}{p_z} n \quad p'_x = \frac{p_x}{p_z} n$$

Perspective Transformation



Τα P'_x και P'_y λοιπόν μπορούν να υπολογιστούν από τα P_x , P_y και P_z .

Το ό,τι διαιρούμε τα P_x και P_y με το P_z δε μας βολεύει στην προσπάθεια να εκφράσουμε τον μετασχηματισμό με τη μορφή ενός transformation array.

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha p_x \\ \alpha p_y \\ \alpha p_z \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Επεκτείνουμε λοιπόν το «κόλπο» των Homogenous Coordinates και χρησιμοποιούμε μια τιμή « α » με την οποία πολλαπλασιάζουμε όλες τις συντεταγμένες.

Projection Transformations

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \frac{n}{p_z}$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha p_x \\ \alpha p_y \\ \alpha p_z \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n p_x / p_z \\ n p_y / p_z \\ ? \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} n p_x \\ n p_y \\ ? \\ p_z \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιούμε λοιπόν για α το Pz

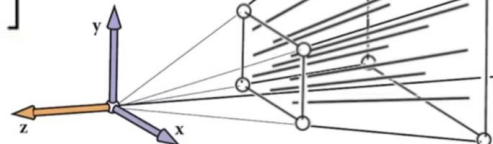
Σημαίνει «αντιστοιχεί» - «είναι ανάλογο»

Το παραπάνω μπορεί να γραφεί με χρήση transformation matrix έτσι:

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Δεν ξέρω όμως τι να κάνω ακόμα με το P'z.

Το Pz ιδανικά θα ήθελα να το διατηρήσω ανέπαφο αφού αφενός δεν εμπλέκεται στη δημιουργία της αίσθηση προοπτικής οπότε δεν επηρεάζεται από το perspective transformation.



Όλα αυτά είναι πολλαπλασιασμένα με Pz – Εξού και δε λύνω το πρόβλημα βάζοντας ?? → 1 0

Projection Transformations

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -fn \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

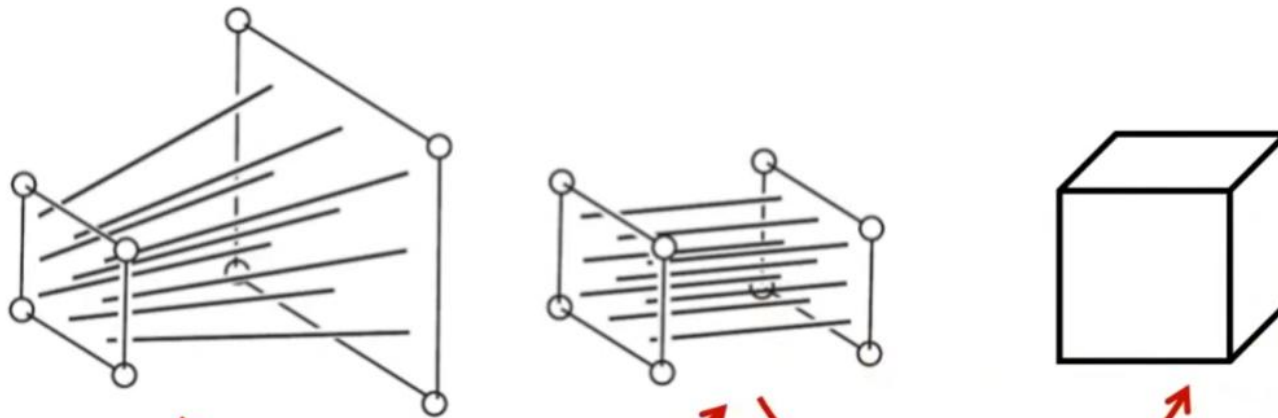
Βάζοντας αυτές τις τιμές, πετυχαίνουμε στα δύο άκρα του άξονα z, στα n και f, να έχουμε: $P'_z = P_z$.

$$p_z = n \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} p'_z &= ((n+f) p_z - fn) / p_z \\ &= (n+f) - fn / p_z \\ &= (n+f) - f \\ &= n \end{aligned}$$

$$p_z = f \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} p'_z &= (n+f) - n \\ &= f \end{aligned}$$

Ενδιάμεσα θα υπάρχει κάποια παραμόρφωση στις τιμές P_z (δηλαδή $P'_z \neq P_z$) αλλά δε μας πειράζει.

Perspective Projection



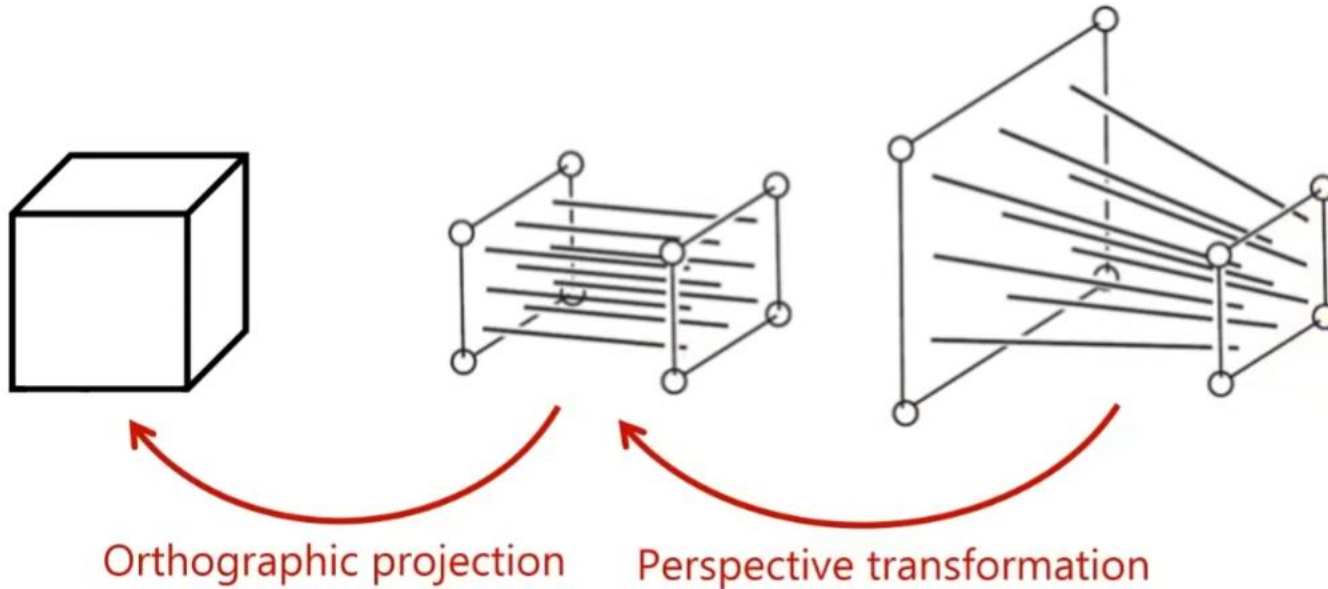
Perspective transformation

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -fn \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Orthographic Projection

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Perspective Projection



Orthographic projection

Perspective transformation

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -fn \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Αυτή είναι πιο σωστή απεικόνιση καθώς πρώτα πολλαπλασιάζουμε με τον πίνακα του Perspective transformation και μετά με του orthographic projection

Projection



Orthographic
projection



Perspective
projection

Άσκηση

Έχουμε ένα σημείο με συντεταγμένες $x=2$, $y=2$, $z=2$.

- Α) Να γράψετε τον πίνακα μετασχηματισμού για μετατόπιση κατά $x=2$, $y=0$ και $z=2$. Ποια θα είναι η νέα θέση του σημείου;
- Β) Να γράψετε τον πίνακα μετασχηματισμού για scaling κατά 2 και στους τρεις άξονες x,y,z . Ποια θα είναι η νέα θέση του σημείου;
- Γ) Να γράψετε τον πίνακα μετασχηματισμού για περιστροφή κατά 90° στον άξονα X . Ποια θα είναι η νέα θέση του σημείου;

Translation

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a)

Scale

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

Rotation X

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta^\circ & -\sin \theta^\circ & 0 \\ 0 & \sin \theta^\circ & \cos \theta^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)

Rotation Y

$$\begin{bmatrix} \cos \theta^\circ & 0 & \sin \theta^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta^\circ & 0 & \cos \theta^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(e)

Rotation Z

$$\begin{bmatrix} \cos \theta^\circ & -\sin \theta^\circ & 0 & 0 \\ \sin \theta^\circ & \cos \theta^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(f)

Άσκηση

Έχουμε ένα σημείο με συντεταγμένες $x=2$, $y=2$, $z=2$.

A) Να γράψετε τον πίνακα μετασχηματισμού για μετατόπιση κατά $x=2$, $y=0$ και $z=2$. Ποια θα είναι η νέα θέση του σημείου;

Translation

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 \\ 2 \\ 2+2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

B) Να γράψετε τον πίνακα μετασχηματισμού για scaling κατά 2 και στους τρεις άξονες x,y,z . Ποια θα είναι η νέα θέση του σημείου;

Scale

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση

Γ) Να γράψετε τον πίνακα μετασχηματισμού για περιστροφή κατά 90° στον άξονα X. Ποια θα είναι η νέα θέση του σημείου;

$$\begin{array}{c} \text{Rotation X} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta^\circ & -\sin \theta^\circ & 0 \\ 0 & \sin \theta^\circ & \cos \theta^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Τα παραπάνω είναι ισοδύναμα με το να πολλαπλασιάζαμε όλους τους 3 πίνακες μετασχηματισμού, με τη σειρά που εφαρμόζονται, με τις αρχικές συντεταγμένες

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \text{Rotation X} & \text{Scale} & \text{Translation} & \end{array}$$

Άσκηση

Δ) Να γράψετε τους πίνακες μετασχηματισμού για perspective και orthographic projection με:

Left (l) = -10 και right (r) = 10

Bottom (b) = -10 και top (t) = 10

near (n) = 1 και far (f) = 11.

Ποια θα είναι η νέα θέση του αρχικού σημείου με orthographic projection;

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & -1.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Perspective transformation

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -fn \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Orthographic Projection

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Perspective transformation

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Orthographic Projection

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & -1.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Orthographic Projection

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & -1.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Perspective transformation

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Για το perspective projection πρώτα εφαρμόζουμε το perspective transformation και μετά orthographic projection