Γραφικά Υπολογιστών

Ιόνιο Πανεπιστήμιο
Τμήμα Πληροφορικής

Στέργιος Παλαμάς, Επίκουρος Καθηγητής

Μάθημα 10:

Βασικά Μαθηματικά και Μετασχηματισμοί 2D.

Δύο μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στα γραφικά Η/Υ είναι:

- Τα διανύσματα (Vectors)

- Οι πίνακες (Matrices)

Vectors

- 1D: $[x]$
- 2D: $[x,y]$
- 3D: $[x,y,z]$
- 4D: $[x,y,z,w]$
- nD: $[x,y,z,w,\ldots]$

Διανύσματα μπορεί να έχουμε σε 1, 2, 3 και περισσότερες διαστάσεις.

Στα γραφικά Η/Υ χρησιμοποιούνται κυρίως 2D και 3D Vectors και σε κάποιες περιπτώσεις και τα 4D.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^{T}$$

Μπορούμε να γράψουμε ένα διάνυσμα κατακόρυφα ή οριζόντια (που είναι το συνηθέστερο για πρακτικούς λόγους).

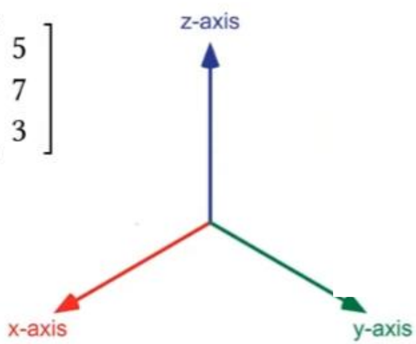
Ένα 3D διάνυσμα μπορεί να υποδηλώνει:
- μια θέση (x,y,z) στο χώρο
- μια κατεύθυνση (και μήκος)

Vectors

Meaning:

- Position
- Direction (with length)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Ένα Διάνυσμα αποκτά νόημα ΜΟΝΟ σε ένα καθορισμένο πλαίσιο συντεταγμένων.

Δε μπορούμε να κάνουμε τίποτε με δύο διανύσματα που ανήκουν σε διαφορετικά πλαίσια συντεταγμένων. Πρώτα πρέπει να τα φέρουμε στο ίδιο πλαίσιο πριν πχ να μπορούμε να τα προσθέσουμε.

Σε ένα συγκεκριμένο λοιπόν πλαίσιο συντεταγμένων ένα 3D διάνυσμα μπορεί να υποδηλώνει :

- Μια θέση (x,y,z) στο χώρο σε συνάρτηση με τους άξονες
- Μια διεύθυνση από την αρχή των αξόνων προς το σημείο (x,y,z)

Notation:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Συνηθίζεται τα διανύσματα να τα αναπαριστούμε με ένα ή περισσότερα γράμματα και ένα βελάκι πάνω από αυτά για να υποδηλώσει ότι πρόκειται για διάνυσμα και όχι απλή αριθμητική τιμή.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

Συχνά στη βιβλιογραφία χρησιμοποιείται για το συμβολισμό και ο διπλανός συμβολισμός με **bold γράμμα**

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

Length:

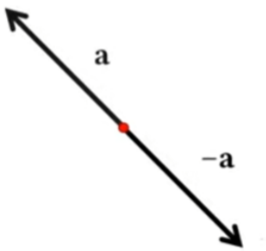
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Το μήκος ενός διανύσματος συμβολίζεται με το γράμμα κλεισμένο σε κάθετες γραμμές και προσδιορίζεται από τον διπλανό μαθηματικό τύπο (η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των συντεταγμένων του).

Unit Vector:

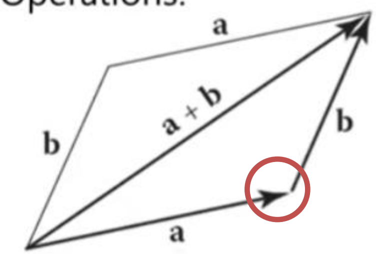
$$|\mathbf{a}| = 1$$

Μοναδιαίο διάνυσμα ονομάζουμε ένα διάνυσμα που έχει μέτρο 1. **Είναι πολύ χρήσιμο όταν ΔΕΝ μας ενδιαφέρει το μήκος αλλά η κατεύθυνση ενός διανύσματος.**



Το αντίθετο ενός διανύσματος έχει την αντίθετη φορά ως προς την αρχή των αξόνων

Operations:



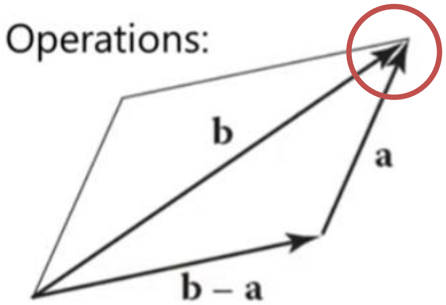
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{bmatrix}$$

Το άθροισμα δύο διανυσμάτων είναι ένα νέο διάνυσμα που έχει συνιστώσες το άθροισμα των αντίστοιχων συνιστωσών των 2 διανυσμάτων.

Στο άθροισμα ισχύει και στα διανύσματα η ΑΝΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ιδιότητα.

Δηλαδή **a+b = b+a**

Διανύσματα



$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{bmatrix}$$

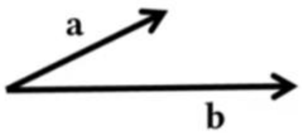
Η διαφορά δύο διανυσμάτων είναι ένα νέο διάνυσμα που έχει συνιστώσες τη διαφορά των αντίστοιχων συνιστωσών των 2 διανυσμάτων.

Φυσικά εδώ δεν ισχύει η αντιμεταθετή ιδιότητα.

Δηλαδή a-b <> b-a

Διανύσματα

dot product

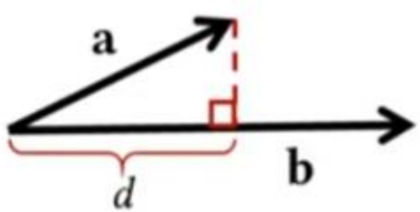


$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Το πρώτο είδος γινομένου διανυσμάτων ονομάζεται «dot product» ή «εσωτερικό γινόμενο» και δίνεται από τον διπλανό μαθηματικό τύπο.

Προσέξτε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι μια αριθμητική τιμή (όπως το μέτρο) και ΌΧΙ διάνυσμα. Χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές γραφικών.

Όπως καταλαβαίνουμε από τον διπλανό τύπο a • a = |a|^2



$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\text{if } |\mathbf{b}|=1, \quad d = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

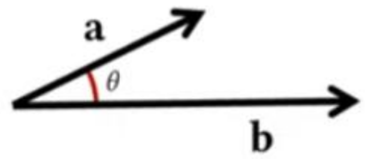
Μία χρήση του εσωτερικού γινομένου **είναι για να υπολογίσουμε το μήκος της προβολής (d) ενός διανύσματος a, πάνω σε μια κατεύθυνση b.**

Καταλαβαίνουμε ότι αν το b είναι μοναδιαίο διάνυσμα τότε το μήκος της προβολής του a στην κατεύθυνση b είναι **d= a • b**

Αν το b ΔΕΝ είναι μοναδιαίο διάνυσμα τότε δεν έχουμε παρά να διαιρέσουμε με το μέτρο του b, δηλαδή :

d= (a • b) / |b|

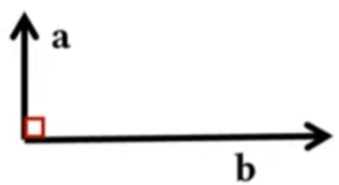
Διανύσματα



Άλλη μία χρήση του εσωτερικού γινομένου **είναι για να υπολογίσουμε το συνημίτονο της γωνίας θ μεταξύ δύο διανυσμάτων a και b.** Από τον διπλανό τύπο καταλαβαίνουμε ότι :

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$$

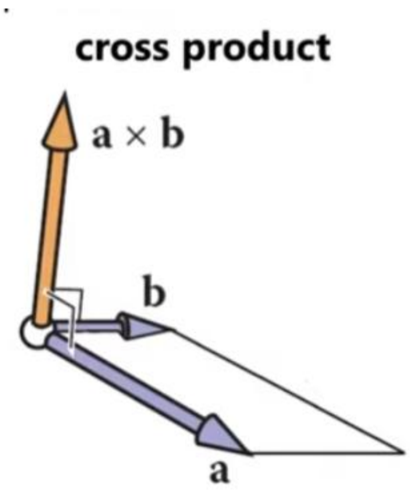


Άλλη μία χρήση του εσωτερικού γινομένου **είναι για να ελέγξουμε αν δύο διανύσματα είναι κάθετα. Τότε έχουν εσωτερικό γινόμενο μηδέν.**

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a}$$

$$k\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{a} \bullet k\mathbf{b} = k\,(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})$$



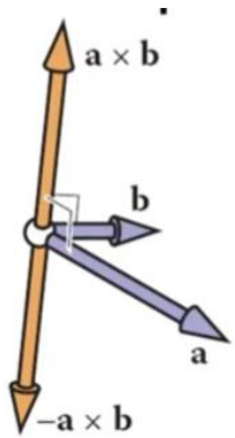
Ο άλλος τύπος γινομένου διανυσμάτων είναι το “cross product” ή εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων

Στις 3 διαστάσεις είναι ένα νέο διάνυσμα **ΚΑΘΕΤΟ στο επίπεδο που ορίζουν τα δύο διανύσματα a και b και έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα a και b.**

Φυσικά στις δύο διαστάσεις το a x b ΔΕΝ θα είναι διάνυσμα αλλά μια αριθμητική τιμή που θα αντιστοιχεί στο εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα a και b.

Το εξωτερικό γινόμενο συχνά χρησιμοποιείται για να πάρουμε ένα διάνυσμα κάθετο στα δύο αρχικά.

Καταλαβαίνουμε ότι αν τα a και b έχουν την ίδια διεύθυνση τότε το **a x b** θα είναι μηδενικό διάνυσμα.



cross product

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

$$(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

Ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου

Πίνακες

Notation:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Γραμμές

Στήλες

Διάσταση Πίνακα : Γραμμές Χ Στήλες

- 2D: 2x2
- 3D: 3x3
- 4D: 4x4

Συνηθισμένες διαστάσεις πινάκων που χρησιμοποιούνται στα γραφικά υπολογιστών

Πίνακες

Πρόσθεση Πινάκων: Μπορώ να προσθέτω πίνακες ΙΔΙΩΝ διαστάσεων. Απλά αθροίζω τα αντίστοιχα στοιχεία τους

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Or more concisely (assuming that **A** + **B** = **C**):[4][5]

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

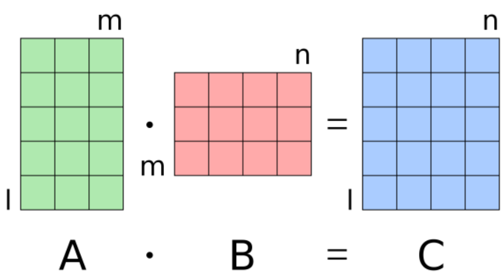
For example:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 \\ 1+7 & 0+5 \\ 1+2 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

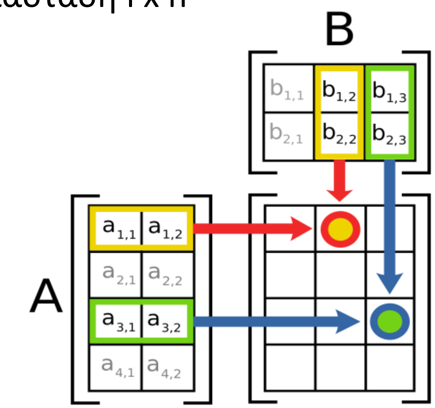
Similarly, it is also possible to subtract one matrix from another, as long as they have the same dimensions. The difference of **A** and **B**, denoted **A** − **B**, is computed by subtracting elements of **B** from corresponding elements of **A**, and has the same dimensions as **A** and **B**. For example:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0 & 3-0 \\ 1-7 & 0-5 \\ 1-2 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -6 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Πίνακες



Πολλαπλασιασμός Πινάκων: Μπορώ να πολλαπλασιάσω δύο πίνακες όταν ο αριθμός στηλών του πρώτου ισούται με τον αριθμό γραμμών του δεύτερου. Αν l x m είναι η διάσταση του πρώτου πίνακα και m x n του δεύτερου, το γινόμενο θα έχει διάσταση l x n



If $\mathbf{A}$ is an $m \times n$ matrix and $\mathbf{B}$ is an $n \times p$ matrix,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

the *matrix product* $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ (denoted without multiplication signs or dots) is defined to be the $m \times p$ matrix[5][6][7][8]

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

such that

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

for $i = 1, \ldots, m$ and $j = 1, \ldots, p$.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1p} + \cdots + a_{2n}b_{np} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12} + \cdots + a_{mn}b_{n2} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων – Παράδειγμα: το γινόμενο ενός Πίνακα 2 X 3 και ενός 3X2, θα είναι ένας πίνακας 2 X 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 20 & 21 \\ 30 & 31 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1x10 + 2x20 + 3x30 & 1x11 + 2x21 + 3x31 \\ 4x10 + 5x20 + 6x30 & 4x11 + 5x21 + 6x31 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+40+90 & 11+42+93 \\ 40+100+180 & 44+105+186 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 & 146 \\ 320 & 335 \end{bmatrix}$$

Διανύσματα

$$
\mathbf{A}\,\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} a_{00}\mathrm{b}_x + a_{01}\mathrm{b}_y + a_{03}\mathrm{b}_z \\ a_{10}\mathrm{b}_x + a_{11}\mathrm{b}_y + a_{13}\mathrm{b}_z \\ a_{20}\mathrm{b}_x + a_{21}\mathrm{b}_y + a_{23}\mathrm{b}_z \end{bmatrix}
$$

Μια συνηθισμένη πράξη που κάνουμε στα γραφικά είναι ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος με έναν πίνακα . Χρησιμοποιείται για να μεταφέρουμε ένα διάνυσμα σε άλλο πλαίσιο συντεταγμένων.

Σημαντικό: A B <> B A .

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός!

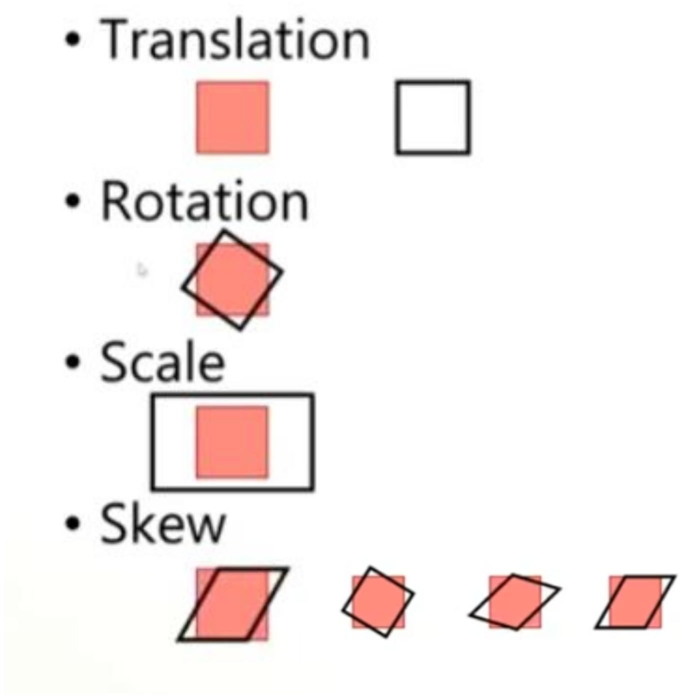
Μετασχηματισμοί 2D

Μια σκηνή αποτελείται από πολλά αντικείμενα τα οποία έχουν σχεδιαστεί ξεχωριστά και θα τα εισάγουμε στη σκηνή, θα τα μετακινήσουμε στις κατάλληλες θέσεις, θα τα περιστρέψουμε, θα τους αλλάξουμε μέγεθος κλπ.

Όλες οι παραπάνω ενέργειες γίνονται με **μετασχηματισμούς (transformations) γι αυτό και η σπουδαιότητά τους είναι μεγάλη στο χώρο των γραφικών Η/Υ**

Μετασχηματισμοί 2D

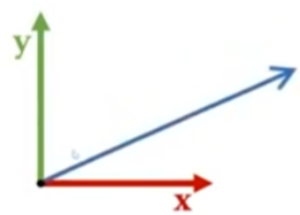
Μαθηματικοί Μετασχηματισμοί.



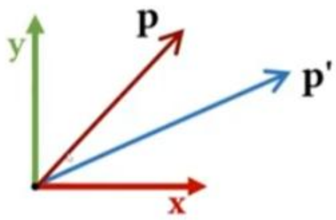
Το Skew είναι ουσιαστικά συνδυασμός περιστροφής, ασύμμετρης μεγέθυνσης και εκ νέου περιστροφής στην αρχική θέση

Μετασχηματισμοί 2D

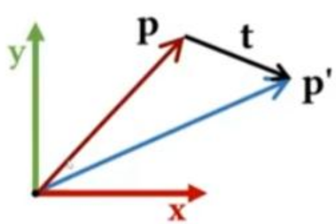
Έχουμε ένα αρχικό διάνυσμα θέσης.



Θέλουμε **Μετακίνηση** σε μια νέα θέση.



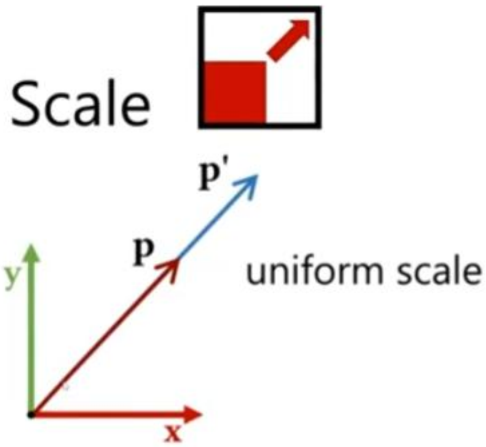
Κατά τη **Μετακίνηση** λοιπόν μεταβαίνουμε από ένα αρχικό διάνυσμα θέσης **p** σε ένα νέο **p’**



Η μετακίνηση λοιπόν ισοδυναμεί με την πρόσθεση ενός διανύσματος μετακίνησης **t** στο αρχικό διάνυσμα θέσης **p ,** οπότε και προκύπτει το νέο διάνυσμα θέσης **p’**

p’ = p + t

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + t_x \\ p_y + t_y \end{bmatrix}$$

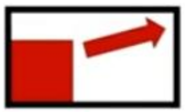


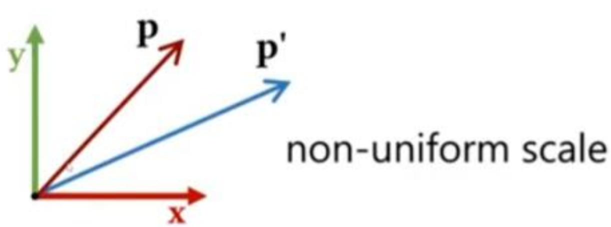
$$\mathbf{p}' = s\,\mathbf{p}$$

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\,p_x \\ s\,p_y \end{bmatrix}$$

Στην **ομοιόμορφη μεγέθυνση/κλιμάκωση** ξεκινάμε από ένα αρχικό διάνυσμα p και πολλαπλασιάζοντας και τις δύο διαστάσεις **με τον ίδιο συντελεστή s** , προκύπτει ένα νέο διάνυσμα που διατηρεί την ίδια κατεύθυνση αλλά διαφέρει ως προς το μήκος.

Μετασχηματισμοί 2D

Scale 

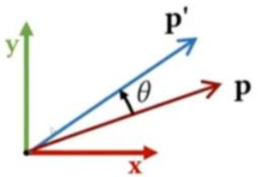


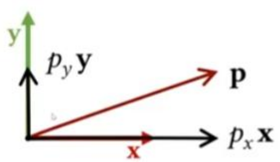
$$\cancel{\mathbf{p}' = s\,\mathbf{p}}$$

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x\, p_x \\ s_y\, p_y \end{bmatrix}$$

Στην **ανομοιόμορφη μεγέθυνση/κλιμάκωση** ξεκινάμε από ένα αρχικό διάνυσμα p και πολλαπλασιάζοντας τις δύο διαστάσεις **με διαφορετικό συντελεστή s_x και s_y** , προκύπτει ένα νέο διάνυσμα που διαφέρει ως προς το μήκος και την κατεύθυνση.

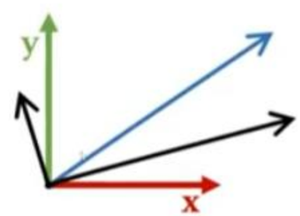
Στην **περιστροφή** , περιστρέφουμε ένα αρχικό διάνυσμα p κατά μια γωνία θ, οπότε προκύπτει ένα νέο διάνυσμα που διαφέρει ως προς τη διεύθυνση , διατηρώντας το ίδιο μήκος.



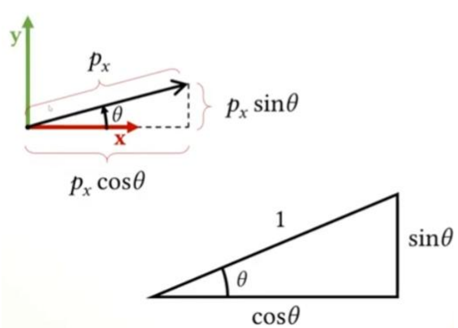


$$\mathbf{p} = p_x \mathbf{x} + p_y \mathbf{y}$$

1. Αναλύουμε το αρχικό διάνυσμα p ως το άθροισμα των δύο συνιστωσών του ως προς τον άξονα x και τον άξονα y.



2. Περιστρέφοντας το διάνυσμα, μπορούμε να περιστρέψουμε μαζί και τις δύο του συνιστώσες.



3. Αν εξετάσουμε μεμονωμένα τη συνιστώσα x , βλέπουμε ότι το διάνυσμά της έχει περιστραφεί κατά γωνία θ , το μήκος της παραμένει το ίδιο (**p_x**) και οι δύο τις συνιστώσες είναι
p_x cosθ και p_x sinθ

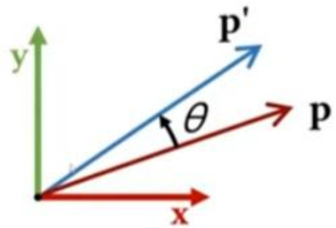
5. Κατ’ αναλογία η συνιστώσα ως προς τον άξονα y θα γίνει:

$$p_y \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

4. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε το νέο διάνυσμα της συνιστώσας x ως:

$$p_x \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί 2D

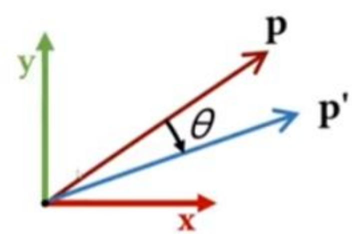


6. Το νέο λοιπόν διάνυσμα p’ που θα προκύψει από την περιστροφή κατά θ, θα είναι το άθροισμα των νέων συνιστωσών που έχουν προκύψει μετά την περιστροφή.

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = p_x \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + p_y \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

7. Τον παραπάνω τύπο μπορώ να τον γράψω σαν γινόμενο δύο πινάκων:

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$



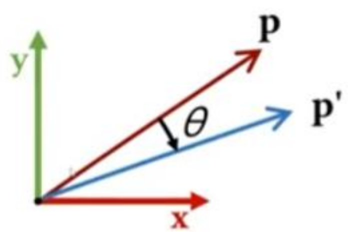
Αν η περιστροφή γινόταν κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου (δεξιόστροφα) οι αντίστοιχοι τύποι γίνονται:

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = p_x \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix} + p_y \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί 2D

Rotation 



$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p'} = \mathbf{R}\,\mathbf{p}$$

Μπορούμε να γράψουμε την περιστροφή πιο σύντομα ως γινόμενο του αρχικού διανύσματος p επί έναν πίνακα μετασχηματισμού R , όπου R είναι:

$$\boxed{\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}$$

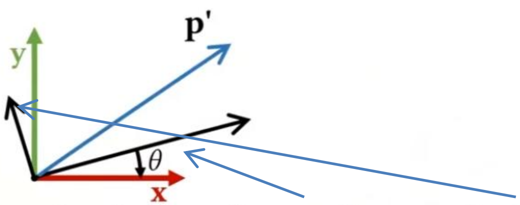
Μετασχηματισμοί 2D

Rotation 

- Rotation matrices are *orthogonal*

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}\cos\theta \\ -\sin\theta\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}\sin\theta \\ \cos\theta\end{matrix}} \end{bmatrix}$$

Κάθετα διανύσματα



$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = p_x \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix} + p_y \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

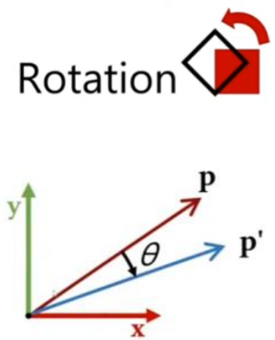
$$\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}\,\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{R} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι ορθογώνιοι πίνακες έχουν και κάποιες άλλες ιδιότητες:

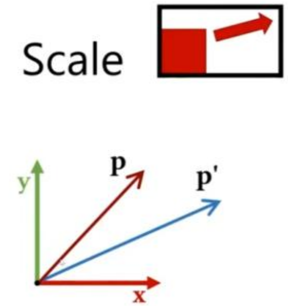
Ο ανάστροφος (Transpose) πίνακας R^T είναι ίδιος με τον αντίστροφο (Inverse) R^{-1}

Μετασχηματισμοί 2D



$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p'} = \mathbf{R}\,\mathbf{p}$$



$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x\,p_x \\ s_y\,p_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p'} = \mathbf{S}\,\mathbf{p}$$

$$\mathbf{p'} = \underbrace{\mathbf{R\,S\,R\,S\,R\,S\,R\,S\,R}}\,\mathbf{p}$$

$$\mathbf{p'} = \mathbf{M}\,\mathbf{p}$$

Οποιαδήποτε σειρά από περιστροφές (R) και Κλιμακώσεις (S) μπορεί να εκφραστεί με έναν συνολικό πίνακα μετασχηματισμού M

Μετασχηματισμοί 2D

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{p}' &= \mathbf{p} + \mathbf{t} \\ \mathbf{p}' &= \mathbf{T}\,\mathbf{p} \end{aligned}}$$

Τι γίνεται όμως αν θελήσω να εκφράσω και το Translation με τον ίδιο τρόπο? Σαν γινόμενο ενός πίνακα μετασχηματισμού **T** με το αρχικό διάνυσμα **p** ?

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + t_x \\ p_y + t_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & ? & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΠΙΝΑΚΑΣ που να μπορεί **να πολλαπλασιαστεί** με το αρχικό διάνυσμα και να μας δώσει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Χρειαζόμαστε ΠΡΟΣΘΕΣΗ και αυτή δεν μπορεί να προκύψει από πολλαπλασιασμό.

Homogeneous Coordinates (Ομοιογενείς Συντεταγμένες)

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1^*p_x + 0^*p_y + 1^*t_x \\ 0^*p_x + 1^*p_y + 1^*t_y \\ 0^*p_x + 0^*p_y + 1^*1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} p_x + t_x \\ p_y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Η λύση δίνεται προσθέτοντας μια ΤΡΙΤΗ συντεταγμένη ίση με 1

Μετασχηματισμοί 2D

$$\mathbf{p'} = \underbrace{\mathbf{T\,S\,R\,T\,S\,R\,S\,R\,S\,R\,T}}\,\mathbf{p}$$

$$\mathbf{p'} = \mathbf{M\,p}$$

Έχοντας καταφέρει να εκφράσω ΌΛΑ τα είδη μετασχηματισμών (Trranslation T, Rotation R και Scaling S) ως πίνακες μετασχηματισμού, **έχω πλέον τη δυνατότητα να εκφράσω ΟΠΟΙΟΝΔΗΠΟΤΕ συνδυασμό μετασχηματισμών με έναν μοναδικό πίνακα Μετασχηματισμού M που θα τα συνδυάζει όλα.**

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ 1 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & c \\ b & d \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} e \\ f \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotation and Scale Component

Translation Component

Περιστροφή 30°

Μετατόπιση x κατά 10

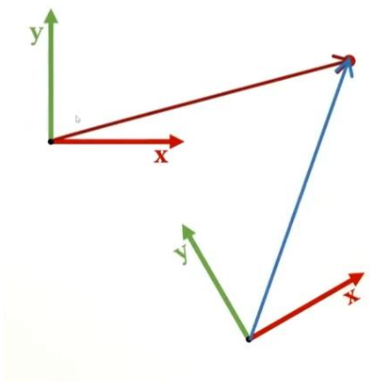
Μεγέθυνση x κατά 5

5*cos(30)	sin(30)	10
-sin(30)	4*cos(30)	5
0	0	1

Μετατόπιση y κατά 5

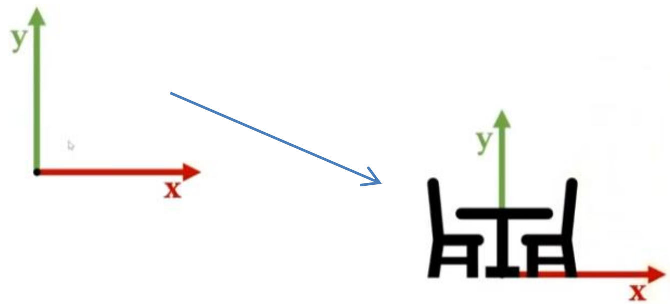
Μεγέθυνση y κατά 4

Μετασχηματισμοί 2D



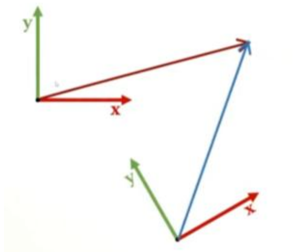
Υπάρχουν φορές που γνωρίζουμε μια θέση ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων (αρχικό διάνυσμα) και θέλουμε να εκφράσουμε ΤΗΝ ΙΔΙΑ θέση ως προς άλλο σύστημα συντεταγμένων (με νέο διάνυσμα που θα αντιστοιχεί όμως στην ίδια θέση).

Αυτό ισοδυναμεί με μετασχηματισμό του σημείου (αφού το νέο σύστημα συντεταγμένων θα αποτελεί ένα μετασχηματισμό του αρχικού συστήματος με περιστροφή , μεταφορά).

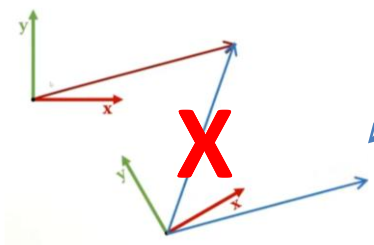


Μετασχηματισμοί 2D

Positions VS Directions



Όταν το διάνυσμα εκφράζει **ΘΕΣΗ** τότε στο νέο σύστημα συντεταγμένων χρειάζομαι το διπλανό νέο διάνυσμα που αντιστοιχεί στην ίδια θέση.



Όταν το διάνυσμα εκφράζει **ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ** τότε στο νέο σύστημα συντεταγμένων χρειάζομαι νέο διάνυσμα που αντιστοιχεί στην ίδια διεύθυνση

Position vector:

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Direction vector:

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c & \boxed{e} \\ b & d & \boxed{f} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Χάρη στις ομοιογενείς συντεταγμένες το παραπάνω πρόβλημα λύνεται χρησιμοποιώντας το 1 σαν συμπληρωματική συντεταγμένη όταν μας ενδιαφέρει η θέση και το 0 όταν μας ενδιαφέρει η διεύθυνση μόνο (οπότε εξουδετερώνει το translation component μηδενίζοντάς το).