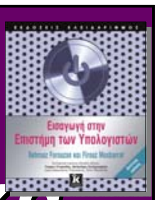


2 Αριθμητικά συστήματα

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών © Εκδόσεις Κλειδάριθμος

Στόχοι

Μετά την ολοκλήρωση αυτού του κεφαλαίου, ο σπουδαστής θα είναι σε θέση:

- Να κατανοεί την έννοια των αριθμητικών συστημάτων.
- Να διακρίνει τις διαφορές μεταξύ των θεσιακών και μη θεσιακών αριθμητικών συστημάτων.
- Να περιγράφει το δεκαδικό, το δυαδικό, το δεκαεξαδικό, και το οκταδικό σύστημα.
- Να μετατρέπει έναν δυαδικό, οκταδικό, ή δεκαεξαδικό αριθμό στο δεκαδικό σύστημα.
- Να μετατρέπει έναν δεκαδικό αριθμό στο δυαδικό, οκταδικό, και δεκαεξαδικό σύστημα.
- Να μετατρέπει έναν δυαδικό αριθμό σε οκταδικό και το αντίστροφο.
- Να μετατρέπει έναν δυαδικό αριθμό σε δεκαεξαδικό και το αντίστροφο.
- Να υπολογίζει το πλήθος των ψηφίων που απαιτούνται σε κάθε σύστημα για την αναπαράσταση μιας συγκεκριμένης τιμής.

2-1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα **αριθμητικό σύστημα** (ή σύστημα αρίθμησης) ορίζει τον τρόπο αναπαράστασης ενός αριθμού με διακριτά σύμβολα. Ένας αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί με διαφορετικό τρόπο σε διαφορετικά συστήματα. Για παράδειγμα, και οι δύο αριθμοί $(2A)_{16}$ και $(52)_8$ αναφέρονται στην ίδια ποσότητα, $(42)_{10}$, όμως αναπαρίστανται διαφορετικά.

Στο παρελθόν έχουν χρησιμοποιηθεί αρκετά αριθμητικά συστήματα, τα οποία μπορούν να διαχωριστούν σε δύο ομάδες: σε **θεσιακά** (positional) και σε **μη θεσιακά** (non-positional) συστήματα. Ο βασικός στόχος μας είναι η περιγραφή των θεσιακών αριθμητικών συστημάτων, αλλά παρέχουμε και παραδείγματα μη θεσιακών συστημάτων.

2-2 ΘΕΣΙΑΚΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σε ένα **θεσιακό αριθμητικό σύστημα**, η θέση που καταλαμβάνει ένα σύμβολο σε έναν αριθμό καθορίζει την τιμή που αντιπροσωπεύει. Σε ένα τέτοιο σύστημα, ένα αριθμός που αναπαρίσταται ως:

$$\boxed{\pm (S_{k-1} \ldots S_2\, S_1\, S_0 .\, S_{-1}\, S_{-2} \ldots S_{-l})_b}$$

έχει την τιμή:

$$n = \pm\ S_{k-1} \times b^{k-1} + \ldots + S_1 \times b^1 + S_0 \times b^0 \ +\ S_{-1} \times b^{-1} + S_{-2} \times b^{-2} + \ldots + S_{-l} \times b^{-l}$$

όπου το S είναι το σύνολο το συμβόλων και το b είναι η **βάση**.

Το δεκαδικό σύστημα (βάση 10)

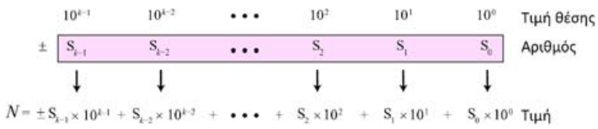
Το σύστημα αυτό έχει ως **βάση** το 10 (**b = 10**) και χρησιμοποιεί δέκα σύμβολα

$$\boxed{S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}}$$

Τα σύμβολα σε αυτό το σύστημα συχνά αναφέρονται ως **δεκαδικά ψηφία** ή απλώς **ψηφία**.

Ακέραιοι

$$N = \pm\ S_{k-1} \times 10^{k-1} + S_{k-2} \times 10^{k-2} + \ldots + S_2 \times 10^2 + S_1 \times 10^1 + S_0 \times 10^0$$



Εικόνα 2.1 Τιμές θέσης για έναν ακέραιο στο δεκαδικό σύστημα

Παράδειγμα 2.1

Στο επόμενο παράδειγμα παρουσιάζονται οι τιμές θέσης για τον ακέραιο +224 στο δεκαδικό σύστημα.

			10^2		10^1		10^0	Τιμή θέσης
			2		2		4	Αριθμός
N	=	+	2×10^2	+	2×10^1	+	4×10^0	Τιμή

Παρατηρήστε ότι το ψηφίο 2 στη θέση 1 έχει την τιμή 20, όμως το ίδιο ψηφίο στη θέση 2 έχει την τιμή 200. Επιπλέον, παρατηρήστε ότι το σύμβολο συν συνήθως παραλείπεται, αν και υπονοείται.

Παράδειγμα 2.2

Στο επόμενο παράδειγμα παρουσιάζονται οι τιμές θέσης για τον δεκαδικό αριθμό -7508. Αντί για δυνάμεις του 10 έχουμε χρησιμοποιήσει τους αριθμούς 1, 10, 100, και 1000.

			1000		100		10		1	Τιμή θέσης
			7		5		0		8	Αριθμός
N	=	−	7×1000	+	5×100	+	0×10	+	8×1	Τιμή

Πραγματικοί αριθμοί

Ακέραιο μέρος — Κλασματικό μέρος

$$R = \pm \; S_{k-1} \times 10^{k-1} + \ldots + S_1 \times 10^1 + S_0 \times 10^0 \; + \; S_{-1} \times 10^{-1} + \ldots + S_{-l} \times 10^{-l}$$

Παράδειγμα 2.3

Στο επόμενο παράδειγμα παρουσιάζονται οι τιμές θέσης για τον πραγματικό αριθμό +24,13.

		10^1		10^0		10^{-1}		10^{-2}	Τιμή θέσης
		2		4	•	1		3	Αριθμός
R =	+	2×10	+	4×1	+	$1 \times 0{,}1$	+	$3 \times 0{,}01$	Τιμή

Το δυαδικό σύστημα (βάση 2)

Σε αυτό το σύστημα η **βάση είναι το 2** (b = 2), και χρησιμοποιούνται μόνο δύο σύμβολα,

$$\boxed{S = \{0, 1\}}$$

Τα σύμβολα σε αυτό το σύστημα συχνά αναφέρονται ως **δυαδικά ψηφία** (binary digits) ή απλώς **bit**).

Ακέραιοι

$$N = \pm \; S_{k-1} \times 2^{k-1} + S_{k-2} \times 2^{k-2} + \ldots + S_2 \times 2^2 + S_1 \times 2^1 + S_0 \times 2^0$$

	2^{k-1}	2^{k-2}	•••	2^2	2^1	2^0	Τιμή θέσης
±	S_{k-1}	S_{k-2}	•••	S_2	S_1	S_0	Αριθμός
	↓	↓		↓	↓	↓	

$N = \pm \; S_{k-1} \times 2^{k-1} + S_{k-2} \times 2^{k-2} + \cdots + S_2 \times 2^2 + S_1 \times 2^1 + S_0 \times 2^0$ Τιμή

Εικόνα 2.2 **Τιμές θέσης για έναν ακέραιο στο δυαδικό σύστημα**

Παράδειγμα 2.4

Στο επόμενο παράδειγμα αποδεικνύεται ότι ο αριθμός (11001)2 στο δυαδικό σύστημα είναι ο αριθμός 25 στο δεκαδικό σύστημα. Ο δείκτης 2 υποδηλώνει ότι η βάση είναι το 2.

		2^4		2^3		2^2		2^1		2^0	Τιμή θέσης
		1		1		0		0		1	Αριθμός
N	=	1×2^4	+	1×2^3	+	0×2^2	+	0×2^1	+	1×2^0	Δεκαδικός

Παρατηρήστε ότι ο αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός είναι N = 16 + 8 + 0 + 0 + 1 = 25.

Πραγματικοί αριθμοί

$$R = \pm \underbrace{S_{k-1} \times 2^{k-1} + \ldots + S_1 \times 2^1 + S_0 \times 2^0}_{\text{Ακέραιο μέρος}} \; \bullet \; \underbrace{S_{-1} \times 2^{-1} + \ldots + S_{-l} \times 2^{-l}}_{\text{Κλασματικό μέρος}}$$

Παράδειγμα 2.5

Στο επόμενο παράδειγμα αποδεικνύεται ότι ο αριθμός (101,11)2 στο δυαδικό σύστημα είναι ίσος με τον αριθμό 5,75 στο δεκαδικό σύστημα.

		2^2		2^1		2^0		2^{-1}		2^{-2}	Τιμή θέσης
		1		0		1	•	1		1	Αριθμός
R	=	1×2^2	+	0×2^1	+	1×2^0	+	1×2^{-1}	+	1×2^{-2}	Τιμή

Το δεκαεξαδικό σύστημα (βάση 16)

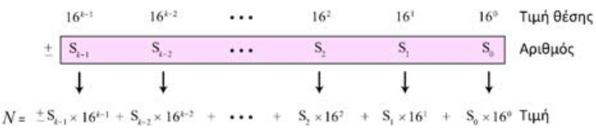
Το σύστημα αυτό έχει ως βάση το 16 (**b = 16**) και χρησιμοποιεί δεκαέξι σύμβολα για την αναπαράσταση αριθμών. Το σύνολο των συμβόλων είναι

S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}

Σημειώστε ότι τα σύμβολα A, B, C, D, E, F ισοδυναμούν με το 10, 11, 12, 13, 14, και 15, αντίστοιχα. Τα σύμβολα σε αυτό το σύστημα συχνά αναφέρονται ως **δεκαεξαδικά ψηφία**.

Ακέραιοι

$$N = \pm S_{k-1} \times 16^{k-1} + S_{k-2} \times 16^{k-2} + \ldots + S_2 \times 16^2 + S_1 \times 16^1 + S_0 \times 16^0$$



Εικόνα 2.3 **Τιμές θέσης για έναν ακέραιο στο δεκαεξαδικό σύστημα**

Παράδειγμα 2.6

Στο επόμενο παράδειγμα αποδεικνύεται ότι ο αριθμός $(2AE)_{16}$ στο δεκαεξαδικό σύστημα είναι ισοδύναμος με τον αριθμό 686 στο δεκαδικό σύστημα.

		16^2		16^1		16^0	Τιμή θέσης
		2		A		E	Αριθμός
N	=	2×16^2	+	10×16^1	+	14×16^0	Τιμή

Παρατηρήστε ότι ο αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός είναι N = 512 + 160 + 14 = 686.

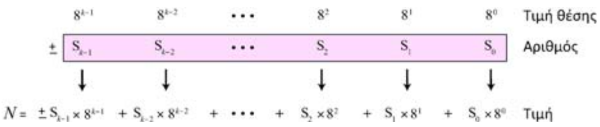
Το οκταδικό σύστημα (βάση 8)

Το σύστημα αυτό έχει ως βάση το 8 (**b = 8**) και χρησιμοποιεί οκτώ σύμβολα για την αναπαράσταση αριθμών. Το σύνολο των συμβόλων είναι

S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Ακέραιοι

$$N = \pm S_{k-1} \times 8^{k-1} + S_{k-2} \times 8^{k-2} + \ldots + S_2 \times 8^2 + S_1 \times 8^1 + S_0 \times 8^0$$



Εικόνα 2.3 **Τιμές θέσης για έναν ακέραιο στο οκταδικό σύστημα**

Παράδειγμα 2.7

Στο επόμενο παράδειγμα αποδεικνύεται ότι ο αριθμός $(1256)_8$ στο οκταδικό σύστημα είναι ο αριθμός 686 στο δεκαδικό σύστημα.

		8^3		8^2		8^1		8^0	Τιμή θέσης
		1		2		5		6	Αριθμός
N	=	1×8^3	+	2×8^2	+	5×8^1	+	6×8^0	Τιμή

Παρατηρήστε ότι ο αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός είναι N = 512 + 128 + 40 + 6 = 686.

Περίληψη των τεσσάρων θεσιακών συστημάτων

Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζεται μια σύνοψη των τεσσάρων θεσιακών αριθμητικών συστημάτων που περιγράφονται σε αυτό το κεφάλαιο.

Πίνακας 2.1 Περίληψη των τεσσάρων θεσιακών συστημάτων

Σύστημα	*Βάση*	*Σύμβολα*	*Παραδείγματα*
Δεκαδικό	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	2345,56
Δυαδικό	2	0, 1	$(1001,11)_2$
Οκταδικό	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	$(156,23)_8$
Δεκαεξαδικό	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F	$(A2C,A1)_{16}$

Στον Πίνακα 2.2 βλέπετε πώς αναπαρίστανται οι αριθμοί 0 έως 15 στα διάφορα συστήματα.

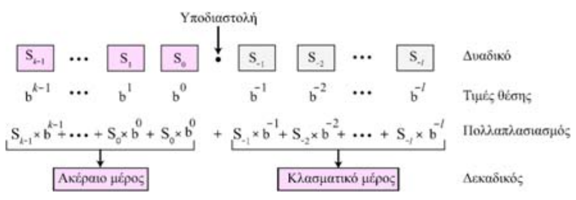
Πίνακας 2.2 Συγκριτική παρουσίαση αριθμών στα τέσσερα συστήματα

Δεκαδικό	*Δυαδικό*	*Οκταδικό*	*Δεκαεξαδικό*
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Μετατροπή

Θα πρέπει να γνωρίζουμε πώς γίνεται η μετατροπή ενός αριθμού από ένα σύστημα σε ένα άλλο σύστημα. Επειδή το δεκαδικό σύστημα είναι το πιο γνωστό, πρώτα θα δείξουμε πώς γίνεται η μετατροπή ενός αριθμού από οποιοδήποτε σύστημα στο δεκαδικό. Έπειτα θα δείτε πώς μετατρέπεται ένας δεκαδικός σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα. Τέλος, θα μάθετε πώς να μετατρέπετε εύκολα αριθμούς από το δυαδικό σύστημα στο δεκαεξαδικό ή το οκταδικό, και το αντίστροφο.

Μετατροπή από οποιαδήποτε βάση στο δεκαδικό σύστημα



Εικόνα 2.5 Μετατροπή από άλλες βάσεις στο δεκαδικό σύστημα

Παράδειγμα 2.8

Στο παράδειγμα αυτό παρουσιάζεται η μετατροπή του δυαδικού αριθμού $(110,11)_2$ σε δεκαδικό: $(110,11)_2 = 6,75$.

Δυαδικός	1		1		0	•	1		1
Τιμή θέσης	2^2		2^1		2^0		2^{-1}		2^{-2}
Μερικό αποτέλεσμα	4	+	2	+	0	+	0,5	+	0,25

Δεκαδικός: 6,75

Παράδειγμα 2.9

Στο παράδειγμα αυτό βλέπετε πώς γίνεται η μετατροπή του δεκαεξαδικού αριθμού $(1A,23)_{16}$ σε δεκαδικό.

Δεκαεξαδικός	1		A	•	2		3
Τιμές θέσης	16^{1}		16^{0}		16^{-1}		16^{-2}
Μερικό αποτέλεσμα	16	+	10	+	0,125	+	0,012

Δεκαδικός: 26,137

Σημειώστε ότι το αποτέλεσμα στον δεκαδικό συμβολισμό δεν είναι ακριβές, επειδή $3 \times 16^{-2} = 0{,}01171875$. Έχουμε στρογγυλοποιήσει αυτή την τιμή σε τρία ψηφία (0,012).

2.25

Παράδειγμα 2.10

Στο παράδειγμα αυτό βλέπετε πώς γίνεται η μετατροπή του αριθμού $(23,17)_8$ στο δεκαδικό σύστημα.

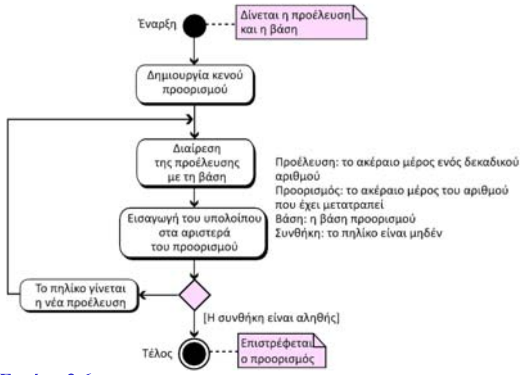
Οκταδικός	2		3	•	1		7
Τιμή θέσης	8^{1}		8^{0}		8^{-1}		8^{-2}
Μερικό αποτέλεσμα	16	+	3	+	0,125	+	0,109

Δεκαδικός: 19,234

Αυτό σημαίνει ότι $(23,17)_8 \approx 19{,}234$ στο δεκαδικό σύστημα. Και εδώ το αποτέλεσμα $7 \times 8^{-2} = 0{,}109375$ έχει στρογγυλοποιηθεί στα τρία ψηφία.

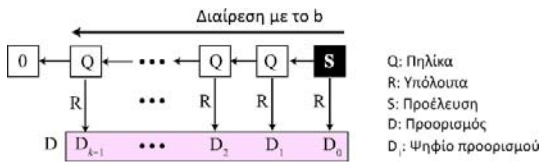
2.26

Δεκαδικός σε οποιαδήποτε βάση



Εικόνα 2.6 Μετατροπή του ακέραιου μέρους ενός αριθμού στο δεκαδικό σύστημα σε άλλες βάσεις

2.27

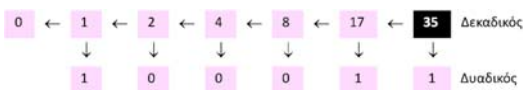


Εικόνα 2.7 Μετατροπή του ακέραιου μέρους ενός αριθμού στο δεκαδικό σύστημα σε άλλες βάσεις

2.28

Παράδειγμα 2.11

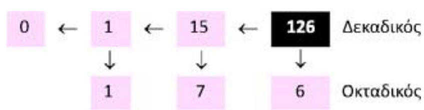
Στο παράδειγμα αυτό βλέπετε πώς γίνεται η μετατροπή του αριθμού 35 από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα. Ξεκινάμε με τον αριθμό στη δεκαδική μορφή, και προχωρούμε προς τα αριστερά διαιρώντας συνεχώς με το 2 για να βρίσκουμε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα. Το αποτέλεσμα είναι $35 = (100011)_2$.



2.29

Παράδειγμα 2.12

Στο παράδειγμα αυτό βλέπετε πώς γίνεται η μετατροπή του αριθμού 126 από το δεκαδικό στο οκταδικό σύστημα. Εδώ προχωρούμε προς τα αριστερά διαιρώντας συνεχώς με το 8 για να βρίσκουμε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα. Το αποτέλεσμα είναι $126 = (176)_8$.

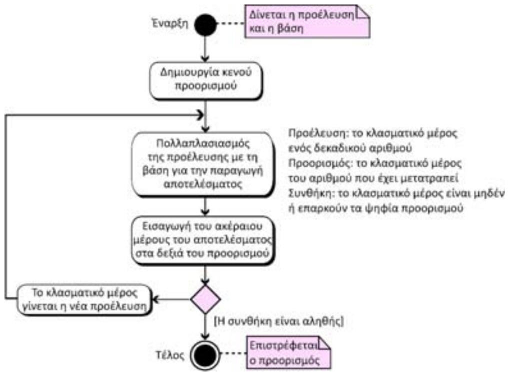


2.30

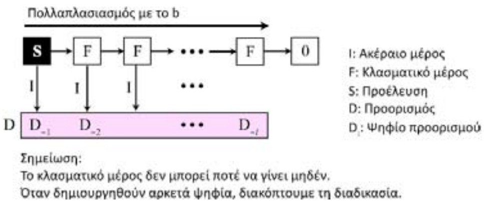
Παράδειγμα 2.13

Εδώ βλέπετε πώς μετατρέπεται ο αριθμός 126 από το δεκαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα. Εδώ προχωρούμε προς τα αριστερά διαιρώντας συνεχώς με το 16 για να βρίσκουμε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα. Το αποτέλεσμα είναι 126 = $(7E)_{16}$

0	←	7	←	**126**	Δεκαδικός
		↓		↓	
		7		E	Δεκαεξαδικός



Εικόνα 2.8 **Μετατροπή του κλασματικού μέρους ενός αριθμού στο δεκαδικό σύστημα σε άλλες βάσεις**



Εικόνα 2.9 **Μετατροπή του κλασματικού μέρους ενός αριθμού στο δεκαδικό σύστημα σε άλλες βάσεις**

Παράδειγμα 2.14

Μετατρέψτε τον δεκαδικό αριθμό 0,625 στο δυαδικό σύστημα.

Δεκαδικός		**0,625**	←	0,25	←	0,50	← 0,00
		↓		↓		↓	
Δυαδικός	•	1		0		1	

Από τη στιγμή που ο αριθμός 0,625 = $(0{,}101)_2$ δεν έχει ακέραιο μέρος, το παράδειγμα δείχνει τον τρόπο υπολογισμού του κλασματικού μέρους.

Παράδειγμα 2.15

Στη συνέχεια μπορείτε να δείτε πώς γίνεται η μετατροπή του αριθμού 0,634 στο οκταδικό σύστημα με τέσσερα το πολύ ψηφία. Το αποτέλεσμα είναι 0,634 = $(0{,}5044)_8$. Παρατηρήστε ότι τώρα πολλαπλασιάζουμε με το 8 (η βάση του οκταδικού συστήματος).

Δεκαδικός		**0,634**	←	0,072	←	0,576	←	0,608	←	0,864
		↓		↓		↓		↓		
Οκταδικός	•	5		0		4		4		

Παράδειγμα 2.16

Στη συνέχεια μπορείτε να δείτε πώς μετατρέπεται ο δεκαδικός αριθμός 178,6 στο δεκαεξαδικό σύστημα με μόνο ένα ψηφίο δεξιά της υποδιαστολής. Το αποτέλεσμα είναι 178,6 = $(B2{,}9)_{16}$ Παρατηρήστε ότι τώρα διαιρούμε ή πολλαπλασιάζουμε με το 16 (η βάση του δεκαεξαδικού συστήματος).

Δεκαδικός	0	←	11	←	**178**		**0,6**	←	0,6
			↓		↓		↓		
Δεκαεξαδικός			B		2	•	9		

Παράδειγμα 2.17

Μια εναλλακτική μέθοδος μετατροπής ενός μικρού δεκαδικού ακεραίου (συνήθως μικρότερου του 256) στο δυαδικό σύστημα είναι με τη διάσπαση του αριθμού σε αθροίσματα ακεραίων που είναι ισοδύναμοι με δυνάμεις του δύο:

Τιμή θέσης	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Ισοδύναμος δεκαδικός	128	64	32	16	8	4	2	1

Δεκαδικός 165 =	128	+	0	+	32	+	0	+	0	+	4	+	0	+	1
Δυαδικός	1		0		1		0		0		1		0		1

Παράδειγμα 2.18

Παρόμοια μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μετατροπή ενός δεκαδικού κλασματικού αριθμού στο δυαδικό σύστημα, όταν ο παρονομαστής είναι δύναμη του δύο:

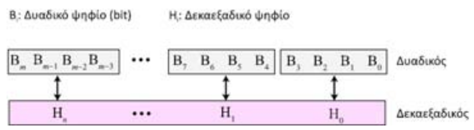
Τιμή θέσης	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
Ισοδύναμος δεκαδικός	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128

Δεκαδικός 27/64	= 16/64	+	8/64	+	2/64	+	1/64
	1/4	+	1/8	+	1/32	+	1/64

Δεκαδικός 27/64 =	0	+	1/4	+	1/8	+	0	+	1/32	+	1/64
Δυαδικός	0		1		1		0		1		1

Το αποτέλεσμα τότε είναι $(0{,}011011)_2$

Μετατροπή από το δυαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα



Εικόνα 2.10 **Μετατροπή από το δυαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα και αντίστροφα**

Παράδειγμα 2.19

Βρείτε το δεκαεξαδικό ισοδύναμο του δυαδικού αριθμού $(110011100010)_2$.

Λύση

Πρώτα χωρίζουμε τον δυαδικό αριθμό σε σχήματα των 4 bit:

1100 1110 0010

Σημειώστε ότι το πιο αριστερό σχήμα μπορεί να έχει ένα έως τέσσερα bit. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το ισοδύναμο κάθε σχήματος, σύμφωνα με τον Πίνακα 2.2 στη σελίδα 54, για να μετατρέψουμε κάθε αριθμό στο δεκαεξαδικό σύστημα: $(4E2)_{16}$.

Παράδειγμα 2.20

Ποιο είναι το δυαδικό ισοδύναμο του $(24C)_{16}$;

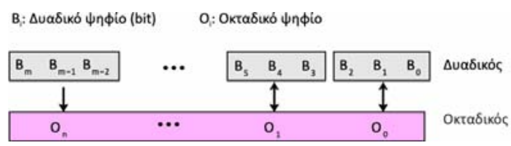
Λύση

Κάθε δεκαεξαδικό ψηφίο μετατρέπεται σε σχήματα των 4 bit:

2 → 0010, 4 → 0100, και C → 1100

Το αποτέλεσμα είναι $(001001001100)_2$.

Μετατροπή από το δυαδικό στο οκταδικό σύστημα



Εικόνα 2.10 **Μετατροπή από το δυαδικό στο οκταδικό σύστημα και αντίστροφα**

Παράδειγμα 2.21

Βρείτε το οκταδικό ισοδύναμο του δυαδικού αριθμού $(101110010)_2$.

Λύση

Κάθε ομάδα των τριών bit μεταφράζεται σε ένα οκταδικό ψηφίο. Το ισοδύναμο κάθε ομάδας των 3 bit παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.2 στη σελίδα 54.

101 110 010

Το αποτέλεσμα είναι $(562)_8$.

Παράδειγμα 2.22

Ποιο είναι το δυαδικό ισοδύναμο του $(24)_8$;

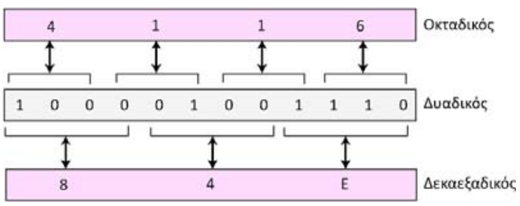
Λύση

Για κάθε οκταδικό ψηφίο γράφουμε το ισοδύναμο σχήμα bit ώστε να πάρουμε

$$\mathbf{2 \rightarrow 010 \;\; και \;\; 4 \rightarrow 100}$$

Το αποτέλεσμα είναι $(010100)_2$.

Μετατροπή από το οκταδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα



Εικόνα 2.12 **Μετατροπή από το οκταδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα και αντίστροφα**

Παράδειγμα 2.23

Βρείτε το ελάχιστο πλήθος δυαδικών ψηφίων που απαιτούνται για την αποθήκευση δεκαδικών ακεραίων με μέγιστο έξι ψηφία.

Λύση

$k = 6$, $b_1 = 10$, και $b_2 = 2$. Τότε έχουμε

$$x = \lceil k \times (\log b_1 / \log b_2) \rceil = \lceil 6 \times (1 / 0{,}30103) \rceil = 20.$$

Ο μεγαλύτερος δεκαδικός αριθμός με έξι ψηφία είναι 999.999, και ο μεγαλύτερος δυαδικός αριθμός 20 bit είναι 1.048.575. Σημειώστε ότι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν αριθμό 19 bit είναι 524287, ο οποίος είναι μικρότερος του 999.999. Επομένως χρειαζόμαστε οπωσδήποτε είκοσι bit.

2-3 ΜΗ ΘΕΣΙΑΚΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Αν και τα **μη θεσιακά συστήματα** δεν χρησιμοποιούνται στους υπολογιστές, εδώ παρέχουμε μια σύντομη περιγραφή τους για λόγους σύγκρισης με τα θεσιακά συστήματα. Σε ένα μη θεσιακό αριθμητικό σύστημα χρησιμοποιείται ένα περιορισμένο πλήθος συμβόλων όπου το καθένα έχει μια τιμή. Ωστόσο, η θέση που καταλαμβάνει ένα σύμβολο σε έναν αριθμό συνήθως δεν έχει καμία σχέση με την τιμή του, αφού η τιμή κάθε συμβόλου είναι σταθερή. Για να βρούμε την τιμή ενός αριθμού, προσθέτουμε τις τιμές όλων των εμφανιζόμενων συμβόλων.

Σε αυτό το σύστημα, ένας αριθμός αναπαρίσταται ως:

$$\boxed{S_{k-1} \ldots S_2\, S_1\, S_0 \bullet S_{-1}\, S_{-2} \ldots S_{-l}}$$

και έχει την τιμή:

$$n = \pm \underbrace{S_{k-1} + \ldots + S_1 + S_0}_{\textit{Ακέραιο μέρος}} + \underbrace{S_{-1} + S_{-2} + \ldots + S_{-l}}_{\textit{Κλασματικό μέρος}}$$

Υπάρχουν ορισμένες εξαιρέσεις στον κανόνα της πρόσθεσης που μόλις αναφέραμε, όπως μπορείτε να δείτε στο Παράδειγμα 2.24.

Παράδειγμα 2.24

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μη θεσιακού συστήματος είναι οι λατινικοί αριθμοί. Αυτό το σύστημα αρίθμησης διαθέτει ένα σύνολο συμβόλων S = {I, V, X, L, C, D, M}. Η τιμή κάθε συμβόλου παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.3

Πίνακας 2.3 Τιμές συμβόλων στο λατινικό σύστημα

Σύμβολο	*I*	*V*	*X*	*L*	*C*	*D*	*M*
Τιμή	1	5	10	50	100	500	1000

Για να βρούμε την τιμή ενός αριθμού, προσθέτουμε τις τιμές των συμβόλων ακολουθώντας συγκεκριμένους κανόνες (ανατρέξτε στο βιβλίο).

Παράδειγμα 2.24 (Συνέχεια)

Στη συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένοι λατινικοί αριθμοί με τις τιμές τους.

III	→	1 + 1 + 1	=	3
IV	→	5 − 1	=	4
VIII	→	5 + 1 + 1 + 1	=	8
XVIII	→	10 + 5 + 1 + 1 + 1	=	18
XIX	→	10 + (10 −1)	=	19
LXXII	→	50 + 10 + 10 + 1 + 1	=	72
CI	→	100 + 1	=	101
MMVII	→	1000 + 1000 + 5 + 1 + 1	=	2007
MDC	→	1000 + 500 + 100	=	1600