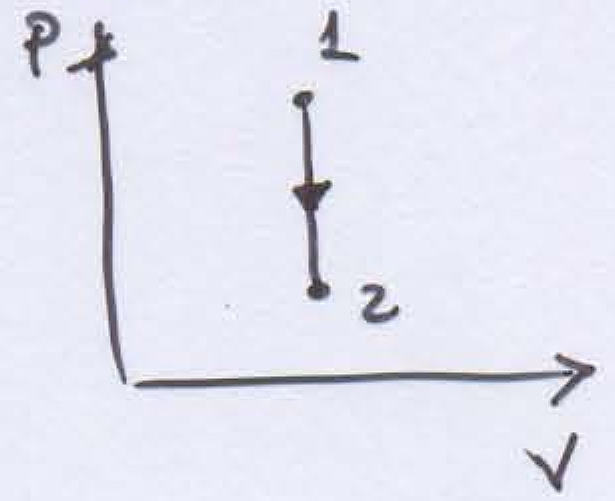
Παραδείγματα υπολογισμού έργου ογκομεταβολής

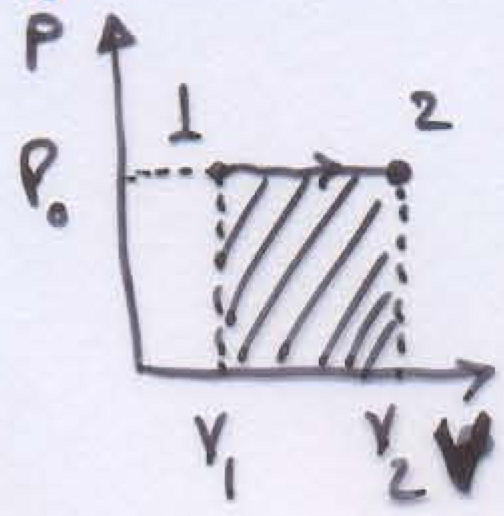
1 Διεργασία σταθερού όγκου



$$W_b = \int_1^2 P \cdot dV = 0$$

$$(dV = 0)$$

2 Διεργασία σταθερής πίεσης, $P = P_0$



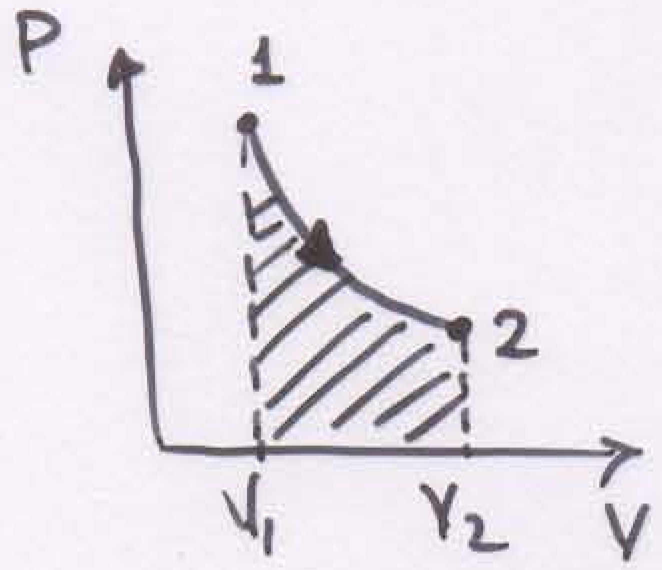
$$W_b = \int_1^2 P\,dV = \int_{V_1}^{V_2} P_0\,dV = P_0 \int_{V_1}^{V_2} dV = P_0 (V_2 - V_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_b = P_0 \cdot \Delta V = m P_0 \cdot \Delta \upsilon$$

αν δίνονται ειδικοί όγκοι υ_1, υ_2

3 Διεργασία σταθερής θερμοκρασίας $T = T_0$ (ισόθερμη)

$$P \cdot V = m R T_0 = C \Rightarrow P = \frac{C}{V}$$ Υπερβολή

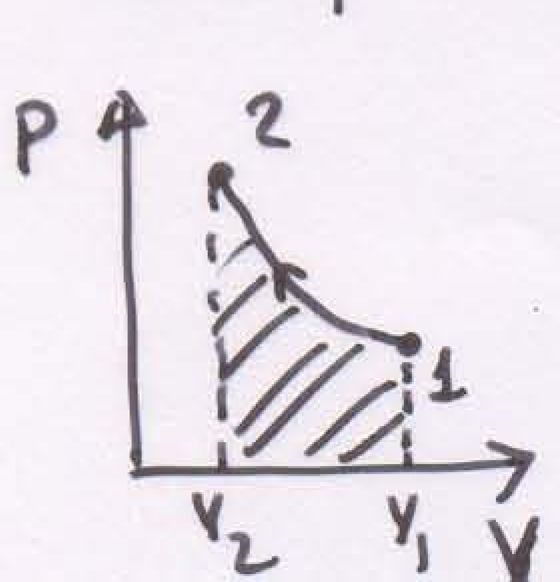


$$W_b = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} C \frac{dV}{V} = C \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = C \cdot \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_b = C(\ln V_2 - \ln V_1) = C \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$C = PV = P_1 V_1 = P_2 V_2 \quad \boxed{W_b = P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = m R T_0 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

Αν $V_2 > V_1 \Rightarrow W_b > 0$ · Εκτόνωση



$$V_2 < V_1 \Rightarrow W_b = m R T_0 \ln \frac{V_2}{V_1} < 0$$

Κατά τη συμπίεση έργο προσδίνεται στο σύστημα και προκύπτει αρνητικό

(4) Πολυτροπικές διεργασίες

Πραγματικά αέρια $P \cdot V^n = C \rightarrow P = \frac{C}{V^n}$

$$W_b = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{C}{V^n}\,dV = C\left(\frac{V^{-n+1}}{1-n}\right)\Bigg|_{V_1}^{V_2} = C\,\frac{V_2^{1-n} - V_1^{1-n}}{1-n}$$

$$C = P_1 V_1^n = P_2 V_2^n$$

$$W_b = \frac{C \cdot V_2^{1-n} - C \cdot V_1^{1-n}}{1-n} = \frac{P_2 V_2^n V_2^{1-n} - P_1 V_1^n V_1^{1-n}}{1-n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{W_b = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1-n} = \frac{mR(T_2 - T_1)}{1-n} \quad n \neq 1}$$

Αιολική ενέργεια (Βλ. και παράδειγμα 2-2, σελ. 77 του βιβλίου)

Σε μια γεωγραφική τοποθεσία, ο άνεμος πνέει με σταθερή ταχύτητα 7 m/s. Να προσδιορίσετε την μηχανική ενέργεια του ανέμου ανά μονάδα μάζας και την θεωρητική παραγωγή ισχύος μίας ανεμογεννήτριας (Α/Γ) με διάμετρο πτερύγων 80 m, για αυτή τη θέση. Επίσης, να προσδιορίσετε την πραγματική παραγωγή ηλεκτρικής ισχύος από την Α/Γ, υποθέτοντας απόδοση 30%. Η πυκνότητα του αέρα είναι ίση με 1,25 kg/m³

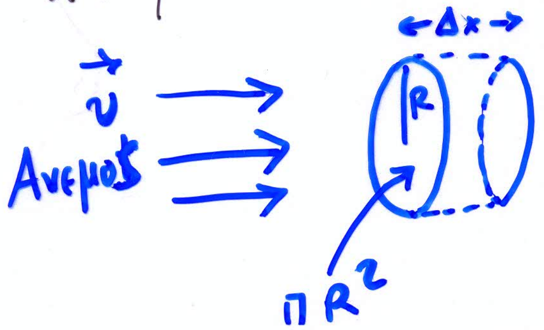
(a) Η αιολική ενέργεια είναι η κινητική ενέργεια του ανέμου $E = E_{κιν} = \frac{1}{2} m u^2$. Άρα η αιολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του αέρα είναι:

$$e = \frac{E}{m} = \frac{u^2}{2} = \frac{7^2}{2}\ \mathrm{J/kg} = 24{,}5\ \mathrm{J/kg}$$

(β) $E = m \cdot e \Rightarrow \underbrace{P}_{\text{Ισχύς της ανεμογεννήτριας}} = \frac{dE}{dt} = \dot{E} = \frac{dm}{dt} \cdot e = \dot{m} \cdot e$

$P = \dot{E} = \dot{m}\, e$

Δηλαδή για να υπολογίσουμε την θεωρητική αιολική ισχύ $(P = \dot{E})$ χρειάζεται να υπολογίσουμε το ρυθμό ροής του ανέμου $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$ δηλ. πόση μάζα αέρα περνάει μέσα από τα πτερύγια της Α/Γ στη μονάδα του χρόνου.



$$\underset{\text{πυκνότητα αέρα}}{\rho} = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \rho \cdot \underbrace{\pi \cdot R^2 \cdot \Delta x}_{\text{όγκος κυλίνδρου}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = \dot{m} = \rho\, \pi R^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \dot{m} = \rho \cdot \pi R^2 \cdot \upsilon$$

Άρα η θεωρητική (δυνάμει) αιολική ισχύς είναι $P = \dot{E} = \rho \cdot \pi R^2 \cdot \upsilon \cdot e \Rightarrow$

$$\Rightarrow P = 1{,}25 \frac{\cancel{Kg}}{\cancel{m^3}}\, 3{,}14 \cdot 40^2\, \cancel{m^2} \cdot 7 \frac{\cancel{m}}{s}\, 24{,}5 \frac{J}{\cancel{Kg}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\text{αιολική ιδανική}} = 1.077.020 \frac{J}{s} = 1{,}077 \frac{MJ}{s} = 1{,}077\ MW$$

(γ) Η πραγματική παραγωγή ηλεκτρικής ισχύος από την ανεμογεννήτρια για απόδοση 30% είναι $P_{\text{παραγ}} = 0{,}3 \cdot P_{\text{ιδαν}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_{\text{παραγ}} = 0{,}3 \cdot 1{,}077\ MW = 0{,}323\ MW = 323\ KW$$

<u>Επιπλέον</u>: Αν η Α/Γ λειτουργεί επί 24 h, ποιό είναι το χρηματικό όφελος ανά ημέρα αν η ηλεκτρική ενέργεια κοστίζει 0,06 €/KWh;

$P_{\text{παραγ.}} = 323\ kW \rightarrow$ Για λειτουργία επί 24 h η ηλεκτρική ενέργεια που παράγεται είναι $E_{\eta\lambda} = 323\ KW \cdot 24\ h = 7.752\ KWh$

Άρα χρηματικό όφελος / ημέρα $= 0{,}06 * 7752 \frac{€}{\cancel{KWh}}\ \cancel{KWh} =$

$= 465{,}1$ € / ημέρα

Πρώτος νόμος της Θερμοδυναμικής

→ Θεωρητική βάση για τη μελέτη των σχέσεων μεταξύ των διαφόρων μορφών ενέργειας και των ενεργειακών αλληλεπιδράσεων.

→ Η ενέργεια δεν μπορεί ούτε να παραχθεί ούτε να καταστραφεί, αλλά μόνο να αλλάξει μορφή.
Όχι μαθηματική απόδειξη. Δεν έχει βρεθεί καμμία φυσική διεργασία που να τον παραβιάζει.

→ Για όλες τις αδιαβατικές $(Q=0)$ διεργασίες μεταξύ δύο ορισμένων καταστάσεων ενός κλειστού συστήματος, το παραγόμενο έργο είναι ανεξάρτητο από τη φύση του συστήματος και τη διεργασία

Καθαρό έργο σε αδιαβατική διεργασία → εξαρτάται μόνο από Αρχική και Τελική κατάσταση
↓
Συνδέεται με μεταβολή μιας ιδιότητας του συστήματος

Η ιδιότητα αυτή είναι η $\boxed{\text{ολική ενέργεια, } E_{ολ}}$

$$\Delta E_{ολ} = E_{ολ(τελ)} - E_{ολ(αρχ)} = W_{καθαρό} \text{ σε αδιαβ. διεργ.}$$

Π.χ. Αδιαβατική συμπίεση αερίου αυξάνει την θερμοκρασία του.
Προσθήκη ενέργειας στο αέριο με τη μορφή έργου ογκομεταβολής

Επέκταση και σε συστήματα με αλληλ/σεις έργου + θερμότητας

Π.χ. ένα σύστημα κερδίζει 12 kJ θερμότητα (Q_{in}) και του προδίνεται έργο 6 kJ (W_{in})

⟹ Συνολικά $\Delta E_{ολ} = Q_{in} + W_{in} = 18\ kJ$

Ισοζύγιο Ενέργειας

[Μεταβολή στην ολική ενέργεια του συστήματος] = [Ολική ενέργεια που εισέρχεται στο σύστημα] − [Ολική Ενέργεια που εξέρχεται από το σύστημα]

$$\Delta E_{\text{σύστημα}} = E_{in} - E_{out}$$

Επίσης
$$\Delta E_{\text{σύστημα}} = \underset{(final)}{E_{\tau\varepsilon\lambda}} - \underset{(initial)}{E_{\alpha\rho\chi}}$$

Ενέργεια είναι ιδιότητα. Αν η κατάσταση του συστήματος δεν αλλάξει τότε $\Delta E_{\text{συστ.}} = 0$

Ισχύει γενικά

Αν δεν υπάρχουν ηλεκτρικά, μαγνητικά και φαινόμενα επιφαν. τάσης

$$\boxed{\Delta E_{syst} = \underset{\text{(Μεταβολή Εσωτερικής Ενέργειας)}}{\Delta U} + \underset{\text{(Μετ. Κιν. Ενέργειας)}}{\Delta KE} + \underset{\text{(Μετ. Δυν. Ενέργειας)}}{\Delta P.E}}$$

Αν το σύστημα είναι στατικό (δεν συμβαίνουν αλλαγές ταχύτητας ή υψομετρική διαφοράς)

$$\boxed{\Delta E = \Delta U}$$

Πως μπορεί να μεταφερθεί η ενέργεια από ή προς ένα σύστημα;

↙ Q ↓ W ↘ Ροή μάζας (σε ανοικτά συστήματα)

$$E_{in} - E_{out} = (Q_{in} - Q_{out}) + (W_{in} - W_{out}) + (E_{μάζα,in} - E_{μάζα,out})$$

$$= \Delta E_{σύστημα}$$

<u>Ρυθμοί μεταβολής</u>

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = \Delta\dot{E}_{σύστημα}$$

Σε κλειστό σύστημα δεν έχουμε ροή μάζας οπότε

$$\Delta E = (Q_{in} - Q_{out}) + (W_{in} - W_{out})$$

$$= (Q_{in} - Q_{out}) - (W_{out} - W_{in})$$

$$= Q_{net,in} - W_{net,out}$$

$$= Q - W$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E = Q - W} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\text{Σε στατικό σύστημα}\\ \Delta U = Q - W\end{array}}$$

Αν το σύστημα εκτελεί κυκλική διεργασία τότε

$$\Delta E = E_{τελ} - E_{αρχ} = 0 = E_{in} - E_{out} \quad \left(\begin{array}{c}E_{τελ} = E_{αρχ}\\ E_{in} = E_{out}\end{array}\right)$$

Άρα $Q = W \Rightarrow \boxed{Q_{net,in} = W_{net,out}}$ <u>για κύκλο</u>

Συνολικό εξερχόμενο έργο = Συνολική εισερχόμενη θερμότητα

$$\downarrow$$

$$\boxed{\dot{Q}_{net,in} = \dot{W}_{net,out}}$$ για έναν κύκλο (ρυθμοί μεταβολών)

Επίσης $q - w = \Delta e \quad \left(q = \frac{Q}{m},\ w = \frac{W}{m},\ \Delta e = \frac{\Delta E}{m}\right)$

$\delta q - \delta w = de$ (Διαφορική μορφή)

Σύμφωνα με τον 1ο νόμο της Θερμοδυναμικής η Θερμότητα (Q) και το έργο (W) είναι ενεργειακές ποσότητες που συμβάλλουν στην ΔΕ και δεν φαίνονται να διαφέρουν.

Η σημαντική διαφορά τους θα φανεί με τον 2ο νόμο της Θερμοδυναμικής.

Η έννοια της ενθαλπίας (H, $h = H/m$)

$$H = U + P.V \quad \text{ή} \quad h = u + P.v$$

(ανά μονάδα μάζας)

$$1\ kPa.m^3 = 1\ kJ$$

Θεωρούμε μία ισοβαρή αντιστρεπτή διεργασία (P = σταθερή)

$$\Delta U = Q - W = Q - P.\Delta V = Q - P(V_{τελ} - V_{αρχ}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{τελ} - U_{αρχ} = Q - P.V_{τελ} + P.V_{αρχ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (U_{τελ} + P.V_{τελ}) - (U_{αρχ} + P.V_{αρχ}) = Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_{τελ} - H_{αρχ} = Q$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta H = Q}$ σε μία ισοβαρή αντιστρεπτή μεταβολή στην οποία πραγματοποιείται μόνο έργο ογκομεταβολής.

$$\Delta H = Q_p$$

($Q_p = Q$ όταν P = σταθερή)

Όταν στο εξεταζόμενο σύστημα πραγματοποιείται και άλλο έργο εκτός από (W_b = P.ΔV έργο ογκομεταβολής ισοβαρής) π.χ. ηλεκτρικό έργο (W_{other}) τότε:

$$Q - W_{other} - P.\Delta V = \Delta U \rightarrow$$

$$\rightarrow Q - W_{other} = \Delta U + P.\Delta V = \underbrace{(U_{τελ} - U_{αρχ}) + P(V_{τελ} - V_{αρχ})}_{\Downarrow\ \boxed{\Delta H = \Delta U + P.\Delta V}}$$

$$= H_{τελ} - H_{αρχ} = \Delta H$$

ή $\boxed{\Delta H = Q - W_{other}}$

$$\Delta H = Q_p - W_{other}$$

Εναλλακτικά αντί για $H_{τελ}$, $H_{αρχ}$ / $U_{τελ}$, $U_{αρχ}$ } γράφουμε και H_2, H_1 / U_2, U_1

Το έργο ογκομεταβολής P.ΔV συμπεριλαμβάνεται στον όρο της ενθαλπίας και έτσι δεν είναι ανάγκη να υπολογιστεί ξεχωριστά.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΕΣ

Ιδιότητα που επιτρέπει σύγκριση της δυνατότητας ενεργειακής αποθήκευσης διαφόρων ουσιών.

4,5 kJ   41,8 kJ

1 kg Fe   1 kg H_2O

20°C → 30°C

Ειδική θερμότητα: $C < \begin{matrix} C_p \\ C_v \end{matrix}$: Ενέργεια που απαιτείται για την αύξηση της θερμοκρασίας της μονάδας μάζας μιας ουσίας κατά ένα βαθμό

νά μονάδα μάζας)

$$\frac{J}{g.°C}, \frac{kJ}{kg.°C}, \frac{kJ}{kg.K}, \frac{J}{kg.K}$$

Πως εκτελείται η διεργασία;

Αν όγκος ουσίας παραμένει σταθερός $\Rightarrow C_v$

Ειδική θερμότητα σε σταθερό όγκο

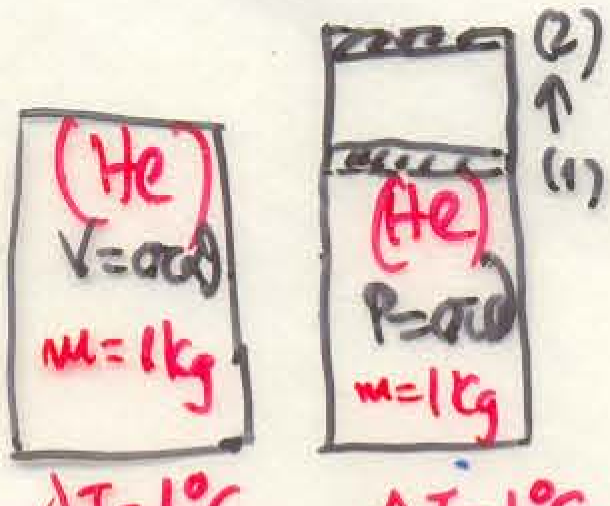
Αν η πίεση παραμένει σταθερή $\Rightarrow C_p$

Ειδική θερμότητα σε σταθερή πίεση

Γενικά $du = \delta q - P\cdot dv \Rightarrow \delta q = du + P\cdot dV$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Αν } V=\text{σταθ.} \Rightarrow \delta q_v = du \\ &\text{Αν } P=\text{σταθ.} \Rightarrow \delta q_p = du + P\cdot dV = dh \end{aligned}\right\} \rightarrow \delta q_p > \delta q_v \rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\delta q_p}{dT} > \frac{\delta q_v}{dT} \Rightarrow \boxed{C_p > C_v} \qquad \left(v=\frac{V}{m}\right) \quad \left(h=\frac{H}{m}\right) \quad \left(u=\frac{U}{m}\right)$$



$\Delta T = 1°C$ $\quad$ $\Delta T = 1°C$

$C_v = 3{,}13 \frac{kJ}{kg \cdot °C}$ $\quad$ $C_p = 5{,}2 \frac{kJ}{kg \cdot °C}$

Σε σταθερή P το σύστημα αφήνεται να εκτονωθεί. Η ενέργεια που δίνεται στο σύστημα θα γίνει dU αλλά και έργο εκτόνωσης (PdV).
Άρα πρέπει να δοθεί περισσότερη (σε σχέση με V=σταθ)

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P \qquad C_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$$

$$h = \frac{H}{m} \qquad u = \frac{U}{m} \qquad v = \frac{V}{m}$$

Προσοχή άλλο το u και άλλο το v

h: ειδική ενθαλπία $\quad$ v = ειδικός όγκος

u = ειδική εσωτερική ενέργεια

C_v : Μέτρο μεταβολής της εσωτερικής ενέργειας μίας ουσίας με τη θερμοκρασία

C_p : Μέτρο μεταβολής της ενθαλπίας μίας ουσίας με την T

$\underbrace{\bar{C}_p, \ \bar{C}_v}_{\frac{kJ}{kmol \cdot K(\text{ή } {}^\circ C)}}$: Αναφέρονται σε ένα mol ουσίας

$\frac{J}{mol \cdot K(\text{ή } {}^\circ C)}$

Προσοχή: C_p και C_v είναι εν γένει συναρτήσεις δηλ. εξαρτώνται από P και T.

$$C_p = f(P, T) \qquad C_v = f(P, T)$$

Ιδανικά αέρια (U, H, C_p, C_v)

Στα ιδανικά αέρια η εσωτερική ενέργεια (και η ειδική εσωτερική ενέργεια) είναι συνάρτηση μόνο της θερμοκρασίας, T.

$$U = U(T) \quad \text{και} \quad u = u(T)$$

$$\left.\begin{array}{l} h = u + Pv \\ P \cdot v = RT \end{array}\right\} \Rightarrow h = u + RT \rightarrow h = h(T)$$

για ιδανικό αέριο

Άρα και $C_v = C_v(T)$ και $C_p = C_p(T)$

για τα ιδανικά αέρια

Άρα $C_v(T) = \frac{du}{dT} \Rightarrow du = C_v(T)\, dT \Rightarrow \int_1^2 du = \int_1^2 C_v(T)\, dT \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_v(T) \cdot dT}$$