ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ: Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

ΙΟΝΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Βλάμος Παναγιώτης

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Ιονίου Πανεπιστημίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμοί

Έστω A και B δύο αυθαίρετα και μη μηδενικά σύνολα. Υποθέτοντας ότι σε κάθε στοιχείο του A ανατίθεται ένα μοναδικό στοιχείο του B, τότε η συλλογή, f, τέτοιων στοιχείων ονομάζεται μετασχηματισμός από το A στο B:

$$f:A \rightarrow B$$

Το σύνολο A ονομάζεται *σύνολο μετασχηματισμού* ενώ το B *σύνολο στόχων*. Για το μοναδικό στοιχείο του B που η f αναθέτει στο $a \in A$, γράφουμε f(a) και το διαβάζουμε f του a.

Παρατήρηση: Ο όρος συνάρτηση χρησιμοποιείται ως συνώνυμο της λέξης μετασχηματισμός.

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμοί

Έστω ένας μετασχηματισμός f:A→B. Αν A' είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του A, τότε το f(A') συμβολίζει το σύνολο των εικόνων του A'. Και αν B' ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του B τότε ο f^{-1}(B') δηλώνει όλα εκείνα τα στοιχεία του A των οποίων η εικόνα βρίσκεται στο B'.

$$f(A') = \{f(a) :\ a \in A'\}\ \kappa\alpha\iota f^{-1}(B') = \{a \in A : f(a) \in B'\}$$

Ονομάζουμε το f(A') εικόνα του A' και το f^{-1}(B') αντίστροφη εικόνα του B'. Το f(A) είναι το *σύνολο τιμών*.

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμοί

Σε κάθε τέτοιο μετασχηματισμό αντιστοιχεί το υποσύνολο A x B που ορίζεται ως $\{(a,f(a)):a\in A\}$. Ονομάζουμε το σύνολο αυτό *γράφο του f*. Δύο μετασχηματισμοί $f:A\to B$ και $g:A\to B$ ορίζονται να είναι ίσοι αν $f(a)=g(a)$ $\forall$ $a\in A$ εάν έχουν δλδ τον ίδιο γράφο.

Μερικές φορές το $|\!\to$ χρησιμοποιείται για να συμβολίσει την εικόνα ενός αυθαιρέτου στοιχείου $x\in A$ υπο ένα μετασχηματισμό $f:A\to B$ γράφοντας: $x|\!\to f(x)$ δλδ

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμοί

=>Έστω $f:R\rightarrow R$ η συνάρτηση η οποία αναθέτει στον κάθε πραγματικό αριθμό x το τετράγωνο του x^2. Μπορούμε να γράψουμε:

$$f(x)=x^2 \text{ ή } x\mapsto x^2$$

Η εικόνα του -3 είναι το 9 δλδ $f(-3)=9$. Όμως $f^{-1}(9)=\{3,-3\}$ επίσης η $f(R)=[0,\infty)$ $=\{x: x\geq 0\}$ είναι η εικόνα του f.

=>Έστω $A=\{a,b,c,d\}$ και $B=\{x,y,z,t\}$. Τότε ένας μετασχηματισμός $f:A\rightarrow B$ είναι ο $f(a)=x$, $f(b)=y$, $f(c)=z$, $f(d)=t$ ή $f=\{(a,x),(b,y),(c,z),(d,t)\}$

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμοί

=>Έστω V ο διαν. χώρος των πολυωνύμων στο R, $p(t)=3t^2-5t+2$

(i) Η παράγωγος ορίζει έναν μετασχηματισμό $D:V\rightarrow V$, όπου $D(f)=df/dt$. Δλδ

$$D(p)=d(3t^2-5t+2)/dt=6t-5$$

(ii) Το ολοκλήρωμα, για παράδειγμα από 0 ως 1, ορίζει έναν μετασχηματισμό $J:V\rightarrow R$. Δλδ

$$J(f)=\int_0^1 f(t)dt \;\rightarrow\; J(p(t))=\int_0^1 (3t^2-5t+2)=0.5$$

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμοί Πίνακες

Έστω Α ένας οποιοσδήποτε πίνακας mxn στο K. Τότε ο Α προσδιορίζει ένας μετασχηματισμό $F(A):K^m \to K^n$ από την $F_A(u)=Au$ όπου τα διανύσματα K^m, K^n γράφονται ως στήλες.

=> Για παράδειγμα αν $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$

τότε $f_A(u) = Au = \begin{bmatrix} -36 \\ 41 \end{bmatrix}$

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Σύνθεση Μετασχηματισμών

Θεωρούμε δύο μετασχηματισμούς $f:A \to B$ και $g:B \to C$ ως:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Δλδ $a \in A$, $f(a) \in B$ και $g(f(a)) \in C$

Η σύνθεση των f,g που συμβολίζεται με $g \circ f$ αντιστοιχεί στο

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Έστω $f:A \to B$, $g:B \to C$ και $h:C \to D$. Τότε $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Έστω $a \in A$ τότε $(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$ και

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμοί Ένα-προς-Ένα και Επί

=>Ένας μετασχηματισμός $f: A \to B$ ονομάζεται 1-1 όταν διαφορετικά σημεία του A έχουν διαφορετικές εικόνες στο B.

Εάν $a \neq a'$ τότε και $f(a) \neq f(a')$ ή Εάν $f(a) = f(a')$ τότε και $a = a'$

=>Ένας μετασχηματισμός $f: A \to B$ ονομάζεται Επί όταν κάθε στοιχείο του Βαποτελεί εικόνα στοιχείου του A.

=>Ένας μετασχηματισμός $f: A \to B$ ονομάζεται 1-1 αντιστοιχεία μεταξύ των A και B εάν είναι τατυτόχρονα 1-1 και επί

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

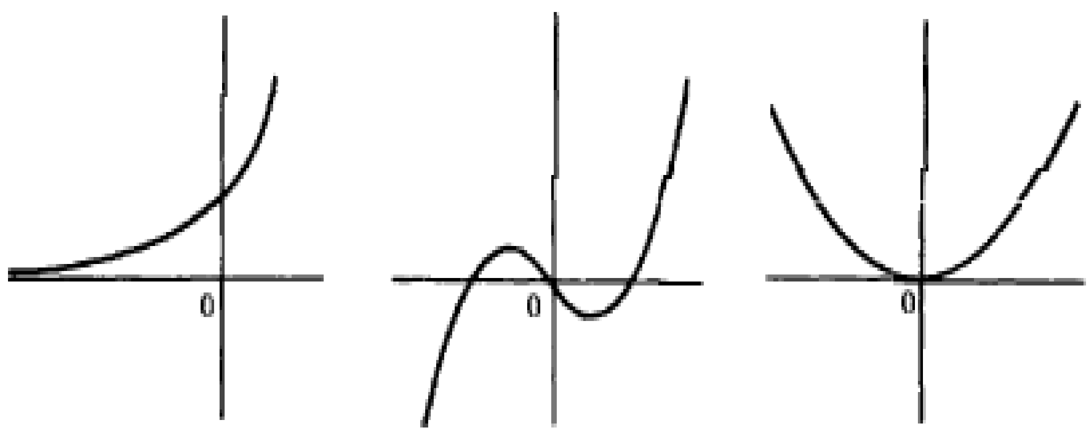
Μετασχηματισμοί Ένα-προς-Ένα και Επί

Έστω $f:R \to R$, $g:R \to R$, $h:R \to R$ ορίζονται ως $f(x)=2^x$, $g(x)=x^3-x$ και $h(x)=x^2$

---η f είναι 1-1 (κάθε οριζόντια γραμμή περιέχει ένα σημείο της f)

---η g είναι επί (κάθε οριζόντια γραμμή περιέχει τουλάχιστο ένα σημείο της g)

---η h δεν είναι 1-1 ούτε επί γιατί: το +2 και το -2 αντιστοιχούν στο ίδιο 4, ενώ το $h^{-1}(-16)$ δεν ορίζεται.



$f(x) = 2^x$ $g(x) = x^3 - x$ $h(x) = x^2$

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Ταυτοτικοί και Αντίστροφοι Μετασχηματισμοί

=>Έστω $f:A\to A$ που ορίζεται από την $f(a)=a$, μια συνάρτηση που αναθέτει κάθε στοιχείο στον εαυτό του και συμβολίζεται 1_A ώστε $1_A(a)=a$.

=>Έστω $f:A\to B$ ονομάζουμε τον $g:B\to A$ αντίστροφο μετασχηματισμό του f και γράφουμε f^{-1}, εάν

$$(f\circ g)=1_B \text{ και } (g\circ f)=1_A$$

Τονίζεται ότι ο f έχει αντίστροφο αν και μόνο αν είναι μία 1-1 αντιστοιχεία του A και B, δλδ αν ο f είναι 1-1 και επί. Επιπλέον για $b\in B$, $f^{-1}(b)=a$ και το a μοναδικό στοιχείο του A για το οποίο $f(a)=b$.

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί (Απεικονίσεις)

=>Έστω V και U οι διανυσματικοί χώροι πάνω στο ίδιο πεδίο K. Ένας μετασχηματισμός F:U→V καλείται *γραμμικός μετασχηματισμός* ή *γραμμική απεικόνιση* αν ικανοποιεί τις παρακάτω δύο συνθήκες.

$$1.\ \vec{u},\ \vec{u} \in V,\ F(v+w) = F(v) + F(w)$$

$$2.\ \forall\ k\ \kappa\alpha\iota\ \vec{v} \in V, F(kv) = kF(v)$$

Με άλλα λόγια είναι γραμμικός μετασχηματισμός αν διατηρεί τις δυο βασικές πράξεις ενός διανυσματικού χώρου.

Για k=0, F(0)=0 και $F(av+bw) = F(av) + F(bw) = aF(v) + bF(w)$

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί (Απεικονίσεις)

(*a*) Let A be any $m \times n$ matrix over a field K. As noted previously, A determines a mapping $F: K^n \to K^m$ by the assignment $v \mapsto Av$. (Here the vectors in K^n and K^m are written as columns.) We claim that F is linear. For, by properties of matrices,

$$F(v + w) = A(v + w) = Av + Aw = F(v) + F(w)$$

and

$$F(kv) = A(kv) = k\,Av = kF(v)$$

where $v, w \in K^n$ and $k \in K$.

(*b*) Let $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ be the "projection" mapping into the xy plane: $F(x, y, z) = (x, y, 0)$. We show that F is linear. Let $v = (a, b, c)$ and $w = (a', b', c')$. Then

$$\begin{aligned} F(v + w) &= F(a + a', b + b', c + c') = (a + a', b + b', 0) \\ &= (a, b, 0) + (a', b', 0) = F(v) + F(w) \end{aligned}$$

and, for any $k \in \mathbf{R}$,

$$F(kv) = F(ka, kb, kc) = (ka, kb, 0) = k(a, b, 0) = kF(v)$$

That is, F is linear.

(*c*) Let $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ be the "translation" mapping defined by $F(x, y) = (x + 1, y + 2)$. Note that $F(0) = F(0, 0) = (1, 2) \neq 0$. That is, the zero vector is not mapped onto the zero vector. Hence F is not linear.

(*d*) Let $F: V \to U$ be the mapping which assigns $0 \in U$ to every $v \in V$. Then, for any $v, w \in V$ and any $k \in K$, we have

$$F(v + w) = 0 = 0 + 0 = F(v) + F(w) \qquad \text{and} \qquad F(kv) = 0 = k0 = kF(v)$$

Thus F is linear. We call F the *zero mapping* and shall usually denote it by 0.

(*e*) Consider the identity mapping $I: V \to V$ which maps each $v \in V$ into itself. Then, for any $v, w \in V$ and any $a, b \in K$, we have

$$I(av + bw) = av + bw = aI(v) + bI(w)$$

Thus I is linear.

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί (Απεικονίσεις)

(*f*) Let V be the vector space of polynomials in the variable t over the real field $\mathbf{R}$. Then the derivative mapping $\mathbf{D}: V \to V$ and the integral mapping $\mathbf{J}: V \to \mathbf{R}$, defined in Example 9.1(*c*) and (*d*), are linear. For it is proven in calculus that for any $u, v \in V$ and $k \in \mathbf{R}$,

$$\frac{d(u+v)}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} \qquad \text{and} \qquad \frac{d(ku)}{dt} = k\,\frac{du}{dt}$$

that is, $\mathbf{D}(u+v) = \mathbf{D}(u) + \mathbf{D}(v)$ and $\mathbf{D}(ku) = k\,\mathbf{D}(u)$; and also,

$$\int_0^1 [u(t) + v(t)]\,dt = \int_0^1 u(t)\,dt + \int_0^1 v(t)\,dt$$

and

$$\int_0^1 ku(t)\,dt = k\int_0^1 u(t)\,dt$$

that is, $\mathbf{J}(u+v) = \mathbf{J}(u) + \mathbf{J}(v)$ and $\mathbf{J}(ku) = k\mathbf{J}(u)$.

(*g*) Let $F: V \to U$ be a linear mapping which is both one-to-one and onto. Then an inverse mapping $F^{-1}: U \to V$ exists. We will show (Problem 9.15) that this inverse mapping is also linear.

Our next theorem (proved in Problem 9.12) gives us an abundance of examples of linear mappings; in particular, it tells us that a linear mapping is completely determined by its values on the elements of a basis.

Theorem 9.2: Let V and U be vector spaces over a field K. Let $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ be a basis of V and let $u_1, u_2, \ldots, u_n$ be any vectors in U. Then there exists a unique linear mapping $F: V \to U$ such that $F(v_1) = u_1$, $F(v_2) = u_2, \ldots, F(v_n) = u_n$.

We emphasize that the vectors $u_1, \ldots, u_n$ in Theorem 9.2 are completely arbitrary; they may be linearly dependent or they may be equal to each other.

Τέλος Ενότητας