

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

**ΕΝΟΤΗΤΑ:** Διανύσματα στους  $R^n$ ,  $C^n$ ,  
διανύσματα στο χώρο (2)



ΙΟΝΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

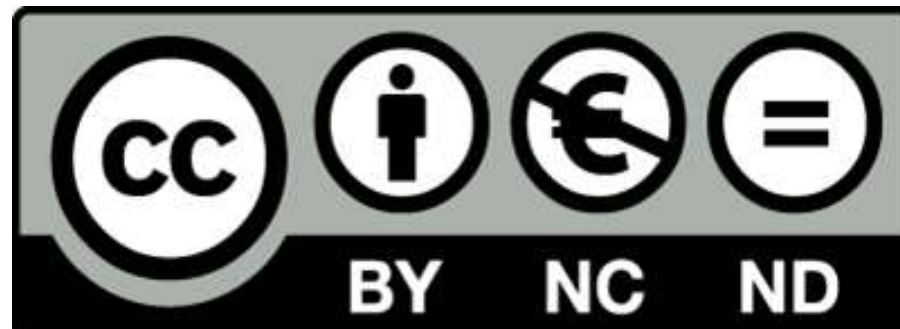
**ΔΙΔΑΣΚΩΝ:** Βλάμος Παναγιώτης



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Ιονίου Πανεπιστημίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα του  $\mathbb{R}^n$  ισχύει

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι το

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

**Αριθμός ή διάνυσμα;**

Τα διανύσματα αυτά λέγονται ορθογώνια (ή κάθετα) όταν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν.

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

Για οποιαδήποτε διανύσματα στον  $\mathbb{R}^n$  ισχύει

$$(\vec{u} + \vec{v}) \vec{w} = \vec{u} \vec{w} + \vec{v} \vec{w}$$

$$(k \vec{u}) \vec{v} = k (\vec{u} \vec{v})$$

$$\vec{u} \vec{v} = \vec{v} \vec{u}$$

$$\vec{u} \vec{u} \geq 0, \quad \vec{u} \vec{u} = 0 \text{ αν και μόνο αν } \vec{u} = \mathbf{0}$$

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

### Διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$

#### Παραδείγματα

1) Έστω τα  $(1,-2,3)$ ,  $(4,5,-1)$ ,  $(2,7,4)$ . Να εξεταστούν ως προς την ορθογωνικότητά τους;

2) Ομοίως τα  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

3) Ποια η τιμή του  $k$  ώστε τα  $(1,2,3,4)$  και  $(6,k,-8,2)$  είναι ορθόγωνα?

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

Η νόρμα (norm) ή το μήκος ή το μέτρο ενός διανύσματος:

Η νόρμα ενός διανύσματος στον χώρο  $\mathbb{R}^n$  συμβολίζεται  $\|\vec{u}\|$  και ορίζεται ως η μη-αρνητική τετραγωνική ρίζα του  $\vec{u} \vec{u}$

Για το διάνυσμα  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  είναι:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

Δλδ η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των συνιστωσών του  $\vec{u}$

Ένα διάνυσμα ονομάζεται μοναδιαίο εάν  $\|\vec{u}\| = 1$

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

Για οποιοδήποτε μη-μηδενικό διάνυσμα του  $\mathbb{R}^n$  το διάνυσμα

$$\hat{u} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

Είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με το  $\vec{u}$ . Η διαδικασία εύρεσης του  $\hat{u}$  ονομάζεται κανονικοποίηση του  $\vec{u}$



# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

### Διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$

#### Παραδείγματα

1) Να βρεθεί το μέτρο των

$$\vec{u} = (1, 2, 3), \vec{v} = (4, 5, 6). \text{ Ορίστε τα } \vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{u}, \vec{u} - \vec{v}, \vec{v} - \vec{u}, \\ 0\vec{u}, 2\vec{u} + 3\vec{v}$$

2) Ομοίως των  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

### Διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$

#### Παραδείγματα

1) Ποιο από το παρακάτω είναι το μοναδιαίο διάνυσμα;

$$\vec{u} = (1, -3, 4, 2), \vec{v} = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6} \right)$$

2) Να γίνει η κανονικοποίηση των παραπάνω

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

### Διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$

**Θεώρημα Schwarz:** για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{u}, \vec{v}$  στον χώρο  $\mathbb{R}^n$ , ισχύει  $\|\vec{u} \vec{v}\| < \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

**Απόδειξη:** Για κάθε πραγματικό αριθμό  $k$  ισχύει

$$\begin{aligned} 0 &\leq (t \vec{u} + \vec{v})(t \vec{u} + \vec{v}) = t^2(\vec{u} \vec{u}) + 2t(\vec{u} \vec{v}) + (\vec{v} \vec{v}) = \\ &= \|\vec{u}\|^2 t^2 + 2t(\vec{u} \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2. \text{ Αν } \|\vec{u}\|^2 = a, 2(\vec{u} \vec{v}) = b, c = \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

**Δλδ για κάθε  $t$   $at^2 + bt + c \geq 0$ . Τότε το πολυώνυμο δεν μπορεί να έχει 2 πραγμ. ρίζες, δλδ  $0 \geq \Delta = b^2 - 4ac$  ή  $4ac \geq b^2$ . Με αντικατάσταση προκύπτει η ανισότητα.**

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

### Διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$

**Θεώρημα Minkowski:** για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{u}, \vec{v}$  στον χώρο  $\mathbb{R}^n$ , ισχύει  $\|\vec{u} + \vec{v}\| < \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u}\vec{u}) + 2(\vec{u}\vec{v}) + (\vec{v}\vec{v}) \\ &\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2, \text{ δηλδ } \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \end{aligned}$$

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

**Απόσταση, Γωνία και Προβολή διανυσμάτων στον  $\mathbb{R}^n$**

**Για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{u}, \vec{v}$  στον χώρο  $\mathbb{R}^n$ , ισχύει ότι η απόστασή τους είναι**

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

**Η γωνία  $\theta$  μεταξύ τους (προυπόθεση: μη-μηδενικά) ορίζεται ως**

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

**και από την ανισότητα Schwarz ισχύει:**  $-1 \leq \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \leq 1$

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

Απόσταση, Γωνία και Προβολή διανυσμάτων στον  $\mathbb{R}^n$

Και αν  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  τότε  $\theta = 90^\circ$ . Να δειχτεί η σχέση του με τον ορισμό της ορθογωνικότητας.

Η προβολή ενός διανύσματος  $\vec{u}$  πάνω σε ένα διάνυσμα  $\vec{v}$  συμβολίζεται με

$$proj(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

### Διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$

#### Παραδείγματα

1) Να βρεθεί η απόσταση, η γωνία και η προβολή των

$$\vec{u} = (1, 2, 3), \vec{v} = (4, 5, 6).$$

2) Ομοίως των

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, Υπερεπίπεδα, Ευθείες, και καμπύλες στον  $\mathbb{R}^n$

Θα προσπαθήσουμε να δείξουμε την διαφορά μίας  $n$ -άδας  $U(a_i) \equiv U(a_1, a_2, \dots, a_n)$  θεωρούμενης ως σημείο του  $\mathbb{R}^n$ , και μίας  $n$ -άδας  $\vec{u} = \left[ u_1, u_2, \dots, u_n \right]$  θεωρούμενης ως ένας διάνυσμα (γραμμή) από την αρχή των αξόνων και μέχρι το σημείο  $c = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

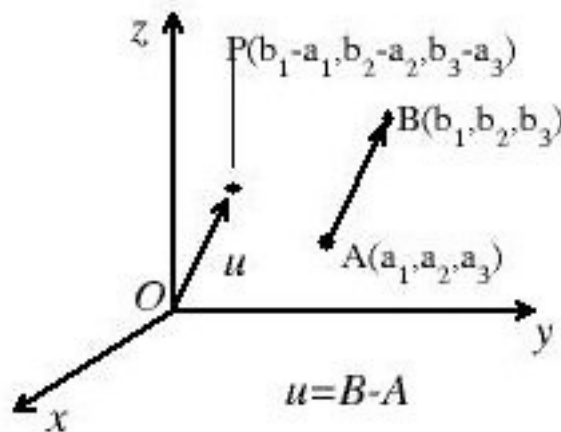
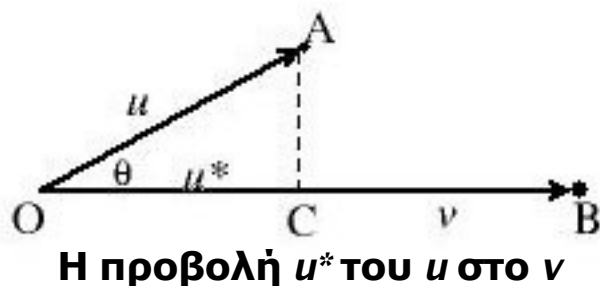


# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

**Προσανατολισμένα διανύσματα**, Υπερεπίπεδα, Ευθείες, και καμπύλες στον  $\mathbb{R}^n$

Σε ένα οποιοδήποτε ζεύγος σημείων  $A(a_i)$  και  $B(b_i)$  στον  $\mathbb{R}^n$  αντιστοιχεί το προσανατολισμένο διάνυσμα από το  $A$  στο  $B$ , δηλ το  $\vec{AB}$



$$u = B - A = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n]$$

Το  $\vec{AB}$  ταυτίζεται με το  $u$  γιατί έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια φορά και διεύθυνση (δεξιό σχήμα).

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, **Υπερεπίπεδα**, Ευθείες, και καμπύλες στον  $\mathbb{R}^n$

**Ένα υπερεπίπεδο  $H$  στον  $\mathbb{R}^n$  είναι το σύνολο σημείων  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  που ικανοποιεί μία γραμμική εξίσωση.**

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

**όπου το  $\vec{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα. Άρα ένα υπερεπίπεδο**

**-> Στον  $\mathbb{R}^2$  είναι μια ευθεία**

**-> Στον  $\mathbb{R}^3$  ένα επίπεδο.**

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, **Υπερεπίπεδα**, Ευθείες, και καμπύλες στον  $\mathbb{R}^n$

**Θα δείξουμε ότι για τον  $\mathbb{R}^3$  το  $\vec{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  είναι ορθογώνιο προς οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα  $\vec{AB}$  όπου τα  $B(b_i)$ ,  $C(c_i)$  είναι σημεία του  $H$ .**

**Αφού τα  $B, C$  ανήκουν στο  $H$  θα ικανοποιούν τις εξισώσεις:**

**$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = b$  και  $a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n = b$  και το**

$$\vec{v} = \vec{BC} = C - B [c_1 - b_1, c_2 - b_2, \dots, c_n - b_n]$$

**Για να είναι ορθογώνιο το  $\vec{v}$  προς το  $\vec{a}$  θα πρέπει  $\vec{a} \vec{v} = 0$ .**

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, **Υπερεπίπεδα**, Ευθείες, και καμπύλες στον  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{v} &= a_1(c_1 - b_1) + a_2(c_2 - b_2) + \dots + a_n(c_n - b_n) = \\ &= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) = b - b = 0\end{aligned}$$

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, Υπερεπίπεδα, **Ευθείες**, και καμπύλες στον  $\mathbb{R}^n$

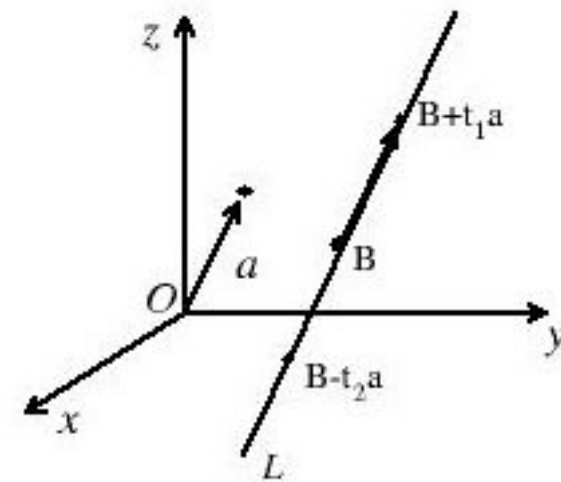
Η ευθεία  $L$  στον  $\mathbb{R}^n$  που διέρχεται από το σημείο  $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$  και έχει φορά και διεύθυνση του  $\vec{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  αποτελείται από τα σημεία  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$x_1 = b_1 + ta_1$$

$$X = ta + B \quad \text{ή} \quad x_2 = b_2 + ta_2 \quad \text{ή} \quad L(t) = (b_i + a_i t)$$

.....

$$x_n = b_n + ta_n$$



# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, Υπερεπίπεδα, **Ευθείες**, και καμπύλες στον  $\mathbb{R}^n$

**Παράδειγμα:** Έστω  $H$  το επίπεδο  $\mathbb{R}^3$  που αντιστοιχεί στην  $2x-5y+7z=4$ . Ναδειχτεί η ορθοκανονικότητα του  $H$  προς το  $(2,-5,7)$ .

**Λύση:** Πρέπει να υπολογίσουμε το διάνυσμα διεύθυνσης. Δύο λύσεις είναι  $A(1,1,1)$  και  $B(5,4,2)$ . Άρα είναι

$$\vec{v} = \vec{AB} = B - A = (2 - 1, -5 - 1, 7 - 1) = [4, 3, 1].$$

Το  $\vec{u} = [2, -5, 7]$  για να είναι κανονικό προς το  $H$  θα πρέπει  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, Υπερεπίπεδα, **Ευθείες**, και καμπύλες στον  $\mathbb{R}^n$

**Παράδειγμα:** Να βρείτε μια εξίσωση του  $\mathbb{R}^4$  που διέρχεται από το  $B(1,3,-4,2)$  και είναι κανονικό προς το διάνυσμα  $\vec{u} = [4, -2, 5, 6]$ .

**Λύση:** Κάθε εξίσωση του χώρου θα δίδεται από την  $4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = k$ . Εφόσον διέρχεται από το  $B$  τότε  $4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) + 6 \cdot 2 = -10$ , **δλδ**  $k = -10$

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, Υπερεπίπεδα, **Ευθείες**, και καμπύλες στον  $\mathbb{R}^n$

**Παράδειγμα:** Να βρείτε μια εξίσωση του  $\mathbb{R}^4$  που διέρχεται από το  $B(1,2,3,-4)$  και έχει τη διεύθυνση του  $\vec{u} = [5,6,-7,8]$  ποια η τιμή για  $t=1$ ;

**Λύση:** Για την ευθεία θα ισχύει  $x_1= 5t+1$ ,  $x_2= 6t+2$ ,  $x_3=-7t+3$ ,  $x_4=8t-4$  ή  $L(t)=(x_1= 5t+1, x_2= 6t+2, x_3=-7t+3, x_4=8t-4)$ . Για  $t=1$  προκύπτει το  $C(6,8,-4,4)$ , **ενώ για  $t=0$ ;**



# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, Υπερεπίπεδα, Ευθείες, και **καμπύλες** στον  $\mathbb{R}^n$

Έστω ένα διάστημα  $D$  του  $\mathbb{R}$  και μία συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε  $F:D \rightarrow \mathbb{R}^n$  δηλ μια καμπύλη του  $\mathbb{R}^n$ . Άρα σε κάθε σημείο  $t \in D$  το αντίστοιχο σημείο στον  $\mathbb{R}^n$  είναι:  $F(t)=[F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)]$ , ενώ η παράγωγος της  $F$  (όταν ορίζεται) οδηγεί στο διάνυσμα:

$$V(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \left[ \frac{dF_1(t)}{dt}, \frac{dF_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dF_n(t)}{dt} \right]$$

το οποίο είναι **εφαπτόμενο** στην καμπύλη. Η κανονικοποίηση του

$V(t)$  οδηγεί στο 
$$T(t) = \frac{V(t)}{\|V(t)\|}$$

# Διανύσματα στους $\mathbb{R}^n$ , $\mathbb{C}^n$ , διανύσματα στο χώρο

## Εισαγωγή

Προσανατολισμένα διανύσματα, Υπερεπίπεδα, Ευθείες, και **καμπύλες** στον  $\mathbb{R}^n$

**Παράδειγμα:** Έστω η καμπύλη  $F(t)=[\sin(t),\cos(t),t]$  στον  $\mathbb{R}^3$ . Ποιό είναι το μοναδιαίο διάνυσμα;

**Λύση:** Η παράγωγος είναι  $V(t)=dF(t)/dt=[\cos(t),-\sin(t),1]$ . Στη συνέχεια κανονικοποιούμε το  $V(t)$ , δηλ χρειαζόμαστε το  $\|V(t)\|$ :

$\|V(t)\|^2=(\cos x)^2+(-\sin x)^2+(1)^2=2$ , και το μοναδιαίο και εφαπτόμενο στην καμπύλη διάνυσμα είναι το:

$$T(t)=V(t)/\|V(t)\|=[\cos(t),-\sin(t),1] * 2^{-1/2}=\dots$$

# Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΘΡΗΣΚΕΜΩΝ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ