Γραφικά Υπολογιστών

Ιόνιο Πανεπιστήμιο
Τμήμα Πληροφορικής

Στέργιος Παλαμάς, Επίκουρος Καθηγητής

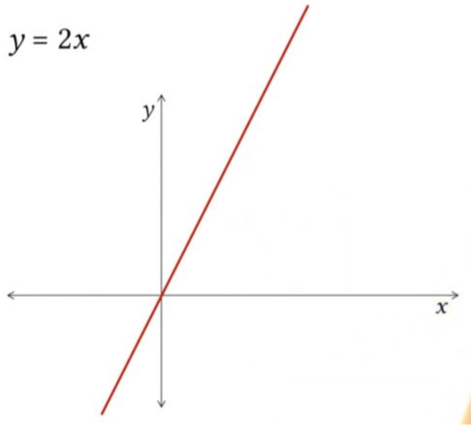
Μάθημα 13:

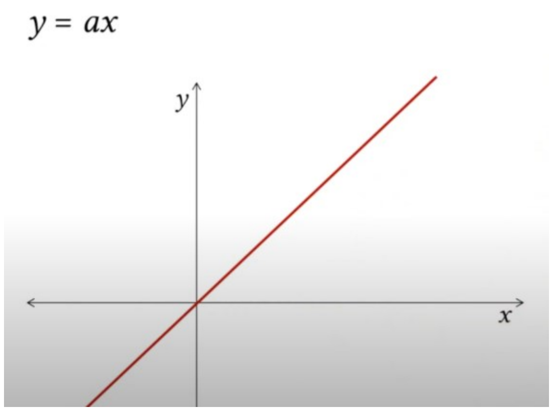
Καμπύλες

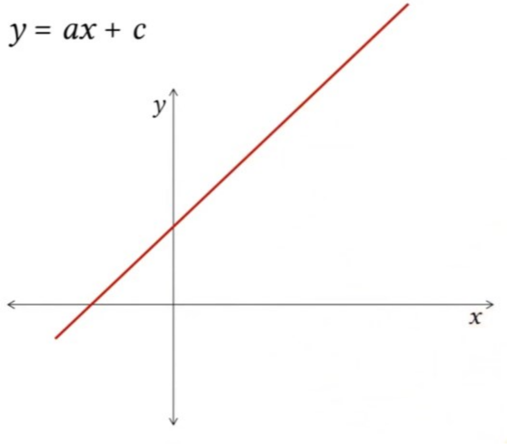
Καμπύλες

Οι καμπύλες έχουν πολλές εφαρμογές στα γραφικά υπολογιστών. Χρησιμοποιούνται πχ στη μοντελοποίηση ρούχων, ή στοιχείων της φύσης όπως το γρασίδι. Μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν σαν paths σε animations. Πολλά 3D μοντέλα σχεδιάζονται με χρήση καμπυλών.

Στις δύο διαστάσεις (2D) ένα σημείο έχει συντεταγμένες x και y. Οι συντεταγμένες μπορεί να συνδέονται μεταξύ τους με μια συνάρτηση y=f(x)





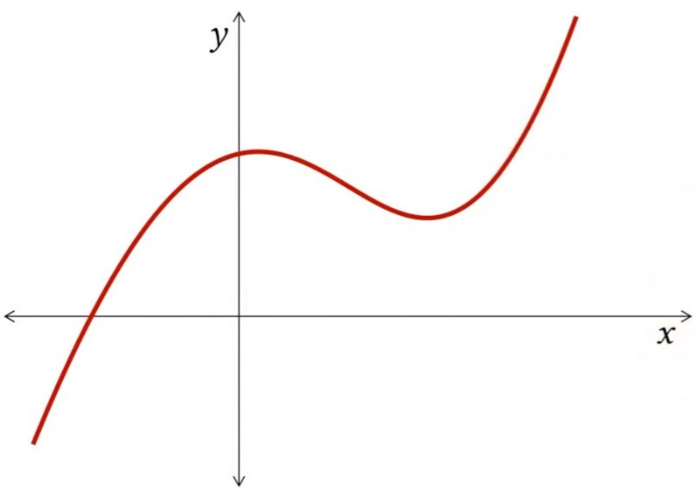


Καμπύλες

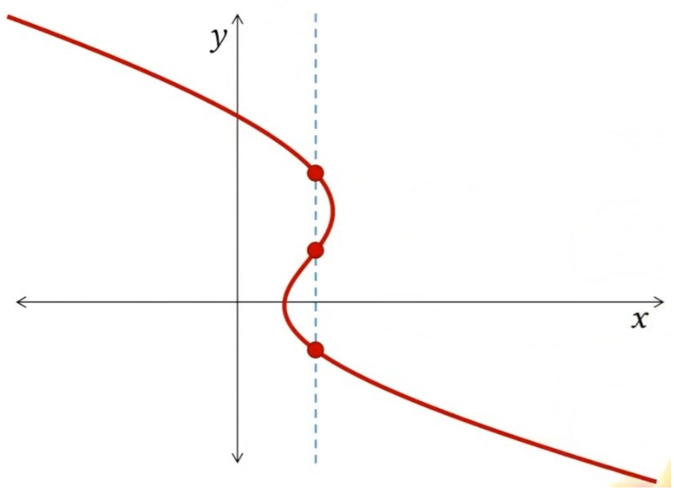
Γενικά μπορώ να έχω οποιαδήποτε συνάρτηση y=f(x). Εκφράζοντας όμως το y σαν συνάρτηση του x, βάζω κάποιους περιορισμούς καθώς δε μπορεί να περιγραφεί οποιαδήποτε καμπύλη μέσω μιας συνάρτησης αυτής της μορφής.

Σε αυτή τη μορφή για κάθε x παίρνω μια μοναδική τιμή για το y. Στη διπλανή όμως περίπτωση βλέπουμε ότι για το ίδιο x έχουμε 3 διαφορετικές τιμές του y οπότε δεν είναι δυνατή η αναπαράσταση με μια τέτοια εξίσωση.

$y = f(x)$

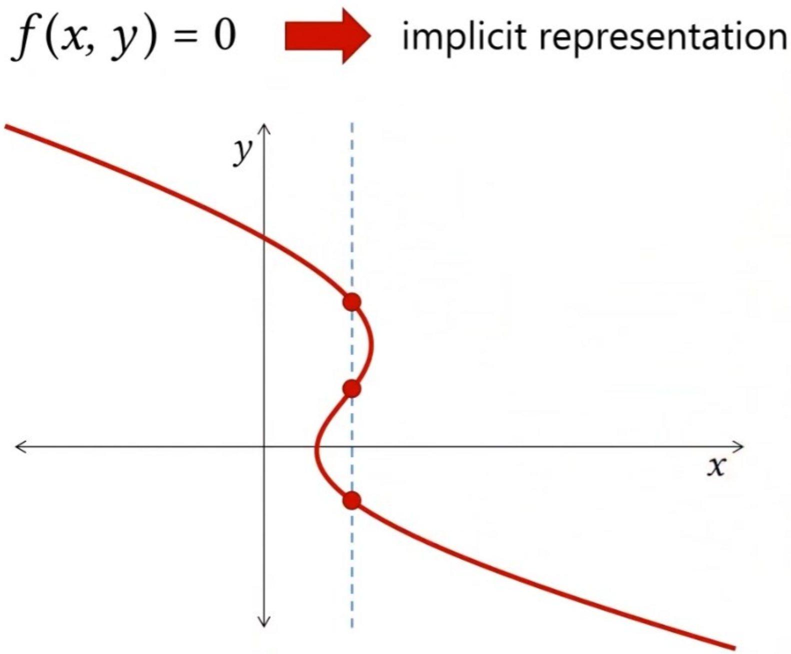


$\cancel{y = f(x)}$



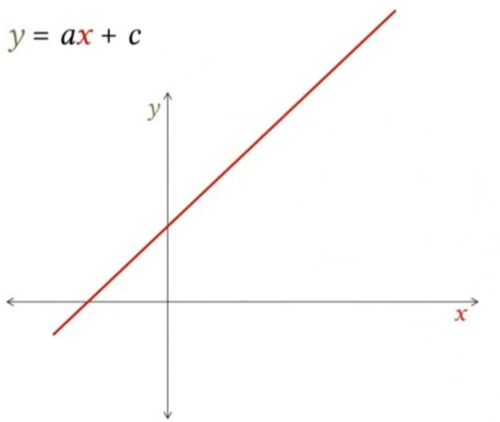
Καμπύλες

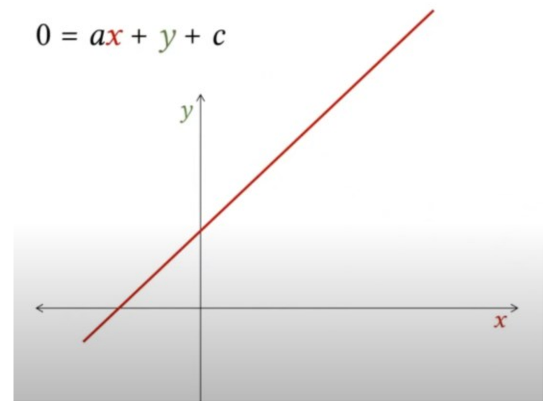
Μπορούμε όμως να αλλάξουμε κάπως τη μορφή της εξίσωσης στην ακόλουθη μορφή. Η νέα αυτή μορφή έχει την έννοια ότι όλα τα σημεία x,y που υπακούουν στην εξίσωση , ανήκουν στην καμπύλη.

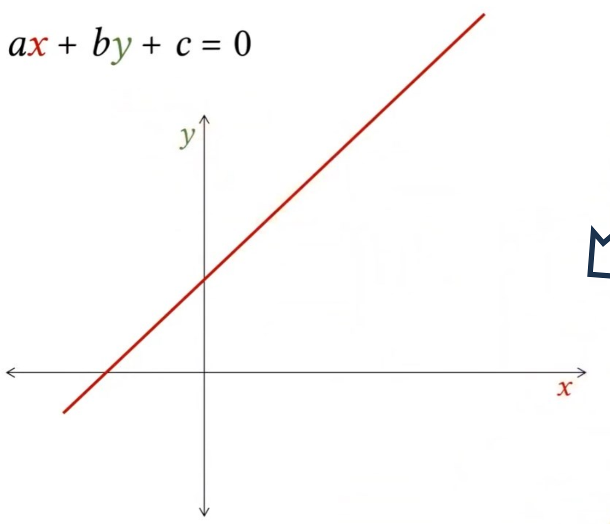


Καμπύλες

Μπορούμε όμως να αλλάξουμε κάπως τη μορφή της εξίσωσης στην ακόλουθη μορφή. Η νέα αυτή μορφή έχει την έννοια ότι όλα τα σημεία x,y που υπακούουν στην εξίσωση , ανήκουν στην καμπύλη.



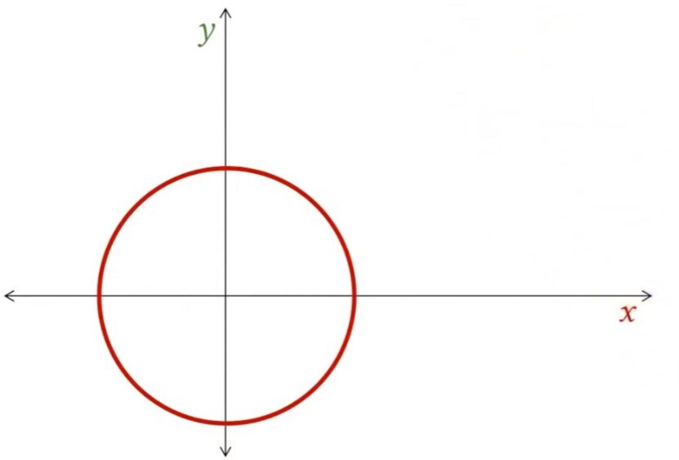




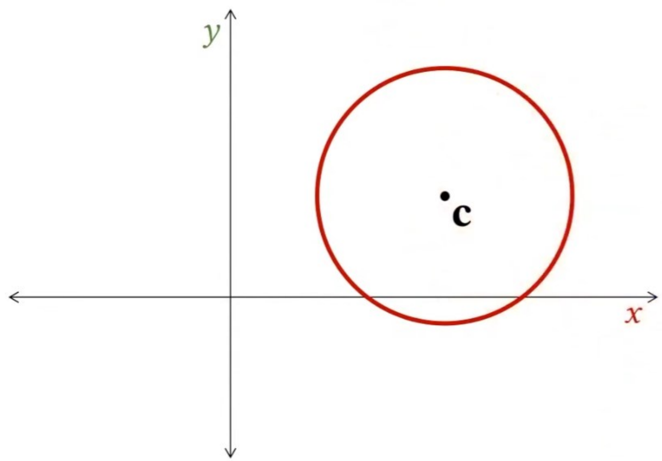
Καμπύλες

Μπορούμε όμως να αλλάξουμε κάπως τη μορφή της εξίσωσης στην ακόλουθη μορφή. Η νέα αυτή μορφή έχει την έννοια ότι όλα τα σημεία x,y που υπακούουν στην εξίσωση , ανήκουν στην καμπύλη.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

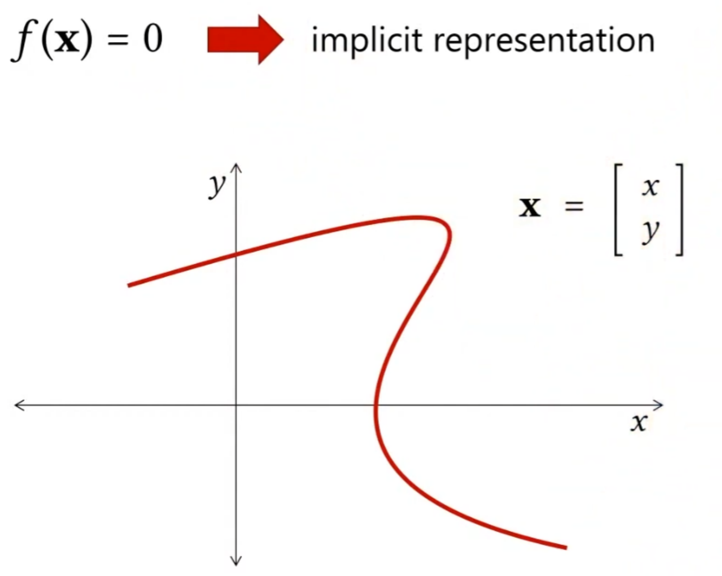


$$f(x, y) = (x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 - r^2 = 0$$



Καμπύλες

Σαν ένα επόμενο βήμα μπορούμε αντί για x,y να χρησιμοποιήσουμε ένα διάνυσμα **x** που στις δύο διαστάσεις θα έχει συντεταγμένες x,y ενώ στις τρείς x,y,z



Το πρόβλημα με αυτή την αναπαράσταση (implicit) είναι ότι αν θέλω να ζωγραφίσω την καμπύλη θα πρέπει να δοκιμάσω ΌΛΑ τα σημεία x,y του χώρου και αυτά που ικανοποιούν την εξίσωση να τα κρατήσω.

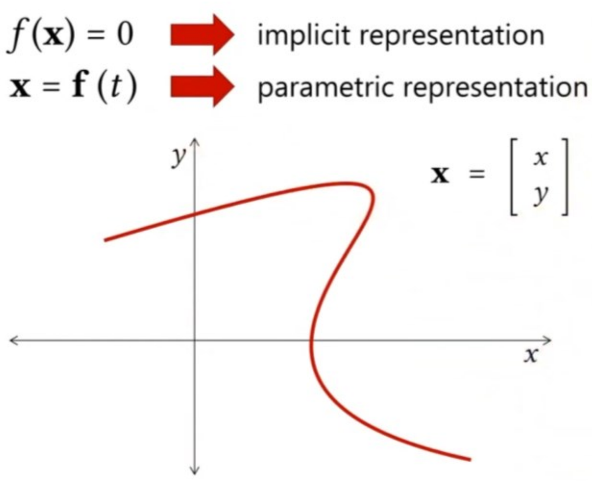
Συνεπώς η χρήση της στα γραφικά είναι περιορισμένη.

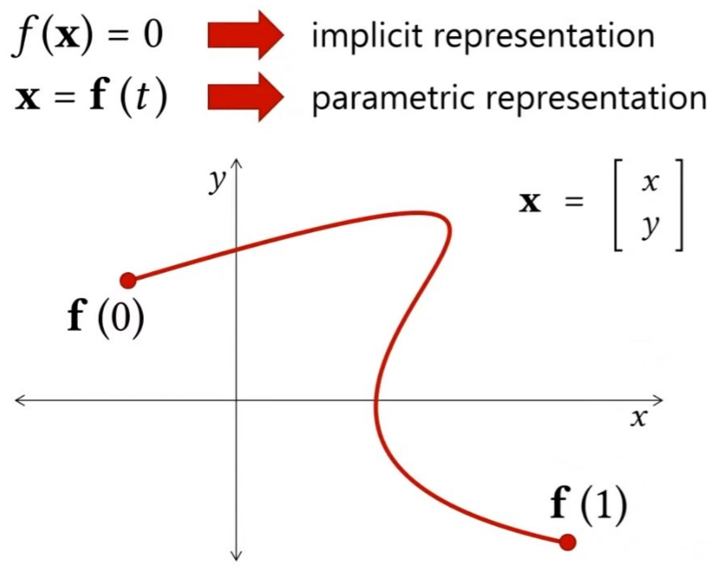
Καμπύλες

Μπορώ λοιπόν να χρησιμοποιήσω μια παράμετρο t και τα x,y να προκύπτουν σε συνάρτηση με αυτή.

Έτσι μπορώ πχ να ξεκινήσω από το t=0 και να καταλήξω στο t=1. Όλες οι ενδιάμεσες τιμές του t θα μου δίνουν τα σημεία x,y της καμπύλης.

Η παραμετρική αναπαράσταση χρησιμοποιείται πολύ στα γραφικά ΗΥ.

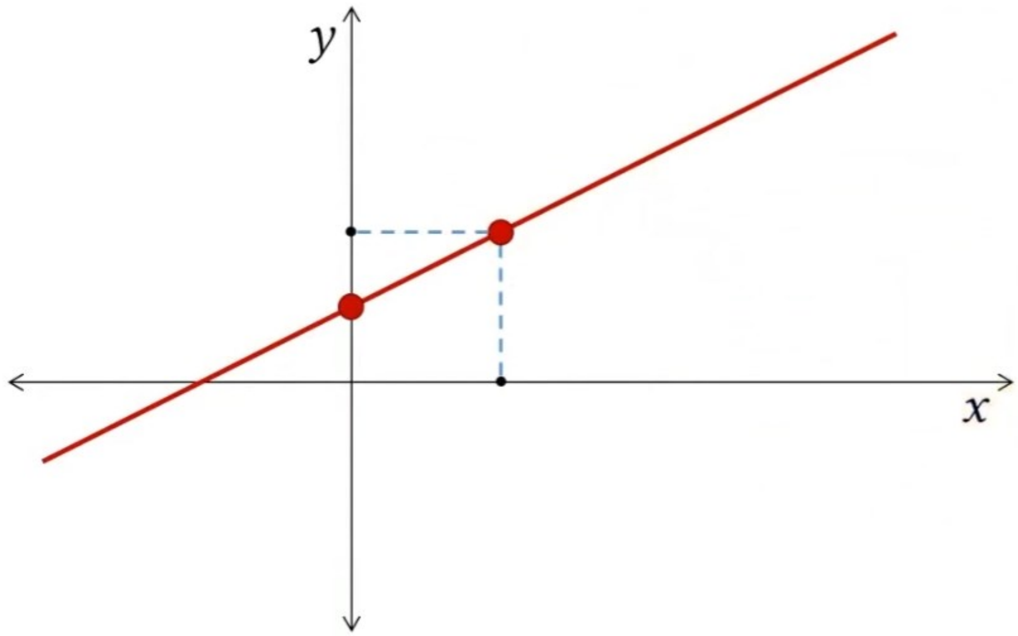




Έχουμε λοιπόν μια ανεξάρτητη μεταβλητή t που κατά κάποιο τρόπο προσθέτει μια επιπλέον διάσταση. Το t παραπάνω μπορεί να είναι 0→1 αλλά θα μπορούσε πχ να είναι και 0→2 χωρίς να αλλάξει το σχήμα της καμπύλης.

$$x - 2y + 2 = 0$$ implicit

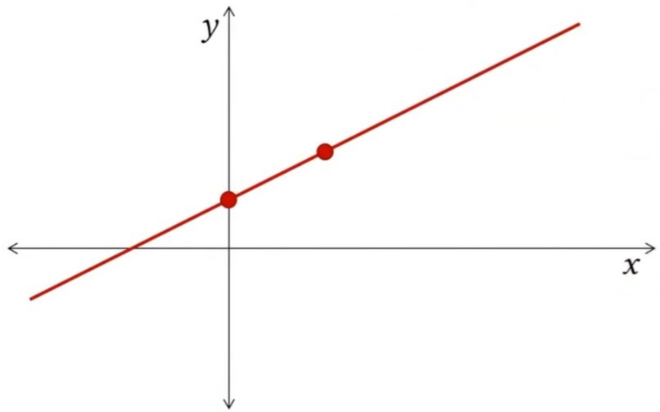
$$x = 2t, \quad y = t + 1$$ parametric



Καμπύλες

$x = 2t\,,\quad y = t + 1$

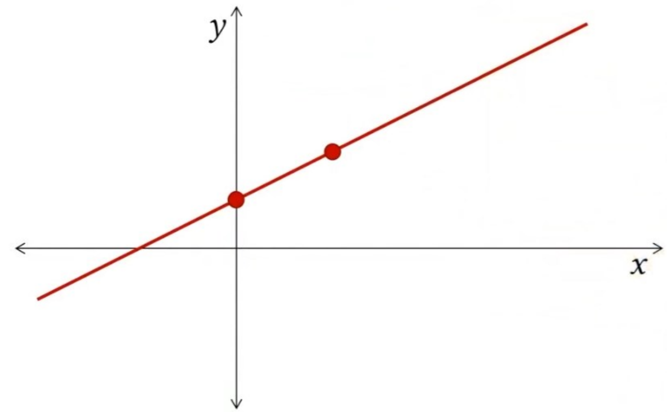
$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

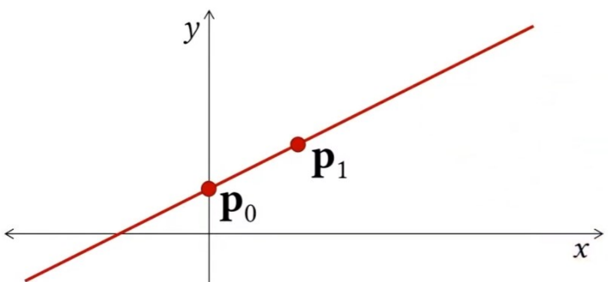
$x = 2t\,,\quad y = t + 1$

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



$x = 2t\,,\quad y = t + 1$

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t\,(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$



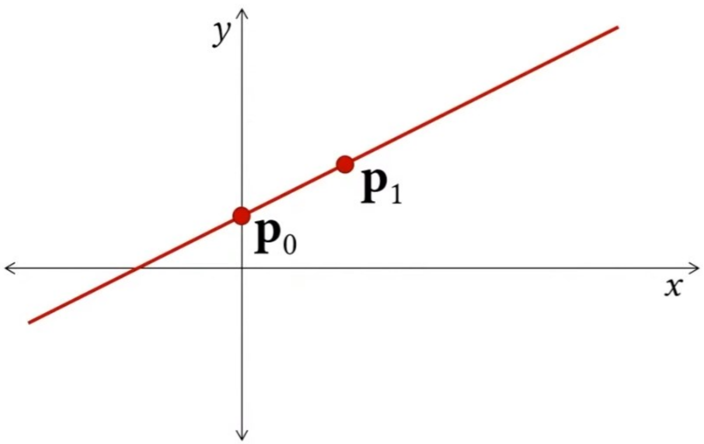
$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Χρησιμοποιώντας δύο σημεία P_0 και P_1 μπορώ να γράψω την παραμετρική εξίσωση με νέα μορφή.

Ουσιαστικά χρησιμοποιεί ένα σημείο της γραμμής (p_0) και ένα διάνυσμα ($p_0 \rightarrow p_1$)

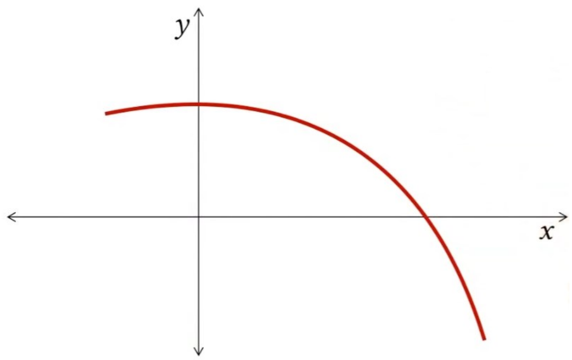
$$\mathbf{f}(t) = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)t + \mathbf{p}_0$$

$$\mathbf{f}(t) = (1 - t)\,\mathbf{p}_0 + t\,\mathbf{p}_1$$



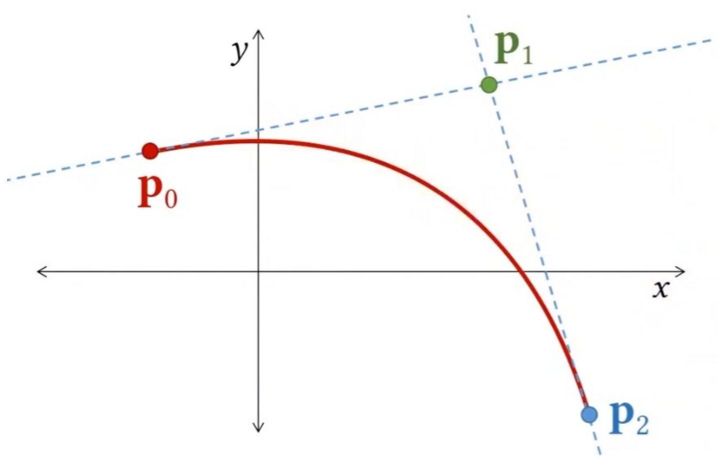
Εν τέλει μπορώ να γράψω την εξίσωση της ευθείας ως μια linear interpolation από το p_0 στο p_1

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{a}t^2 + \mathbf{b}t + \mathbf{c}$$



Αν πάμε σε δεύτερη δύναμη του t παίρνουμε μια παραβολική καμπύλη.

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{a}t^2 + \mathbf{b}t + \mathbf{c}$$
$$\mathbf{f}(t) = (\mathbf{p}_0 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)t^2 + 2(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)t + \mathbf{p}_0$$

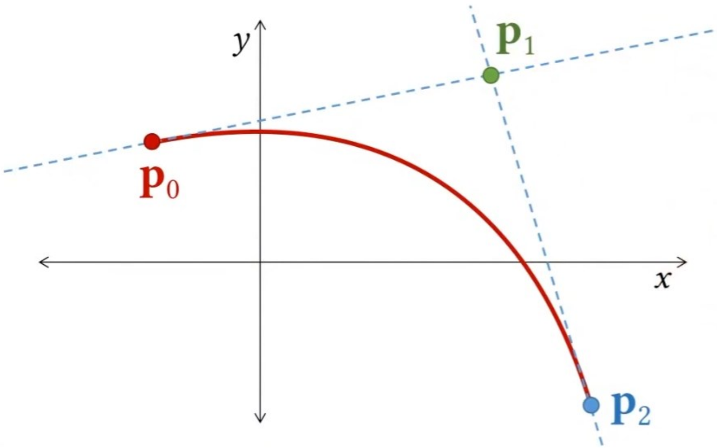


Αν πάρω τώρα τις εφαπτομένες στα σημεία p_0 και p_2 και το σημείο p_1 που αυτές τέμνονται η εξίσωση της καμπύλης γίνεται όπως δίπλα.

Καμπύλες

$$\mathbf{f}(t) = (\mathbf{p}_0 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)t^2 + 2(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)t + \mathbf{p}_0$$

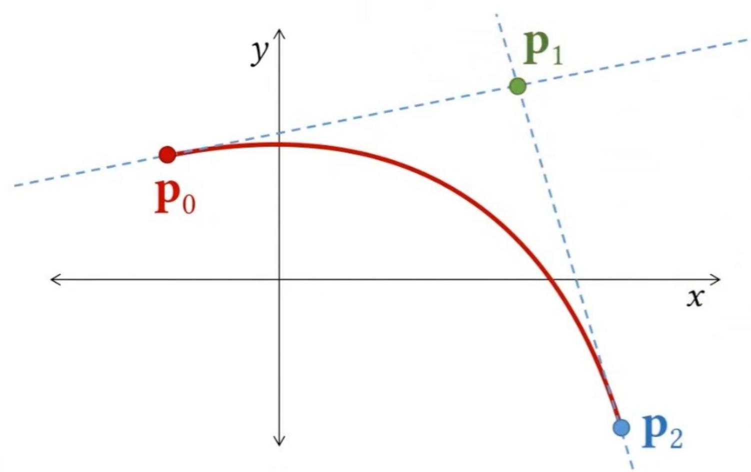
$$\mathbf{f}(t) = (1-t)^2\mathbf{p}_0 + 2(1-t)t\,\mathbf{p}_1 + t^2\,\mathbf{p}_2$$



Μπορούμε να γράψουμε πιο κομψά την εξίσωση της καμπύλης όπως φαίνεται δίπλα, ώστε τα p0, p1 και p2 να εμφανίζονται από μια φορά. Και έτσι έχουμε τις πολύ δημοφιλείς Bezier Curves όπου μια καμπύλη ορίζεται από 3 σημεία χειρισμού.

Bézier Curves

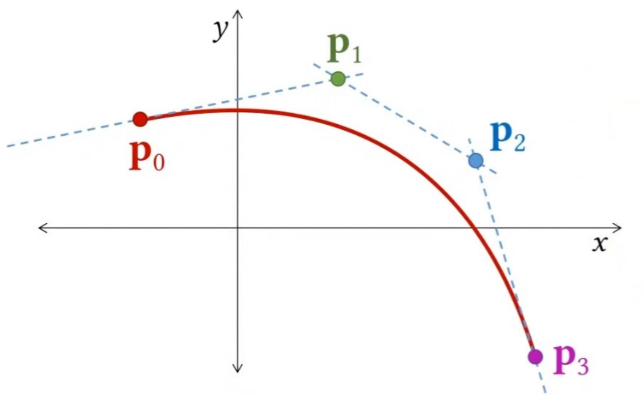
$$\mathbf{f}(t) = (1-t)^2\mathbf{p}_0 + 2(1-t)t\,\mathbf{p}_1 + t^2\,\mathbf{p}_2$$



Καμπύλες

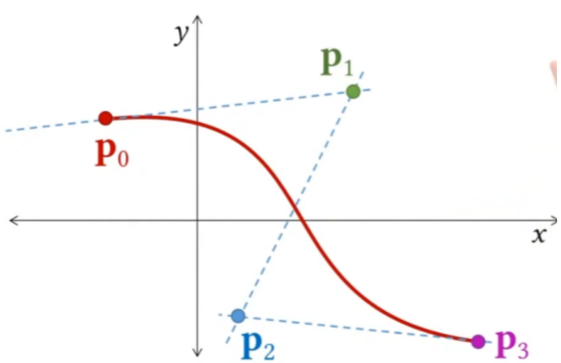
Bézier Curves

$$\mathbf{f}(t) = (1-t)^3\mathbf{p}_0 + 3(1-t)^2 t\,\mathbf{p}_1 + 3(1-t)t^2\,\mathbf{p}_2 + t^3\,\mathbf{p}_3$$



Bézier Curves

$$\mathbf{f}(t) = (1-t)^3\mathbf{p}_0 + 3(1-t)^2 t\,\mathbf{p}_1 + 3(1-t)t^2\,\mathbf{p}_2 + t^3\,\mathbf{p}_3$$



Μπορούμε να προσθέσουμε επιπλέον σημεία ελέγχου. Πχ προσθέτοντας ένα επιπλέον (4 συνολικά) έχουμε την cubic Bezier Curve.

Με τρία σημεία ελέγχου, η καμπύλη αναγκαστικά θα βρίσκεται σε ένα επίπεδο , αφού 3 σημεία ορίζουν ένα επίπεδο.

Με τέσσερα σημεία ελέγχου η καμπύλη μπορεί να είναι 3D . Γιαυτό και η cubic Bezier είναι η πιο δημοφιλής μορφή στα γραφικά ΗΥ.

Bézier Curves

Linear:

$$\mathbf{f}(t) = (1-t)\,\mathbf{p}_0 + t\,\mathbf{p}_1$$

Quadratic:

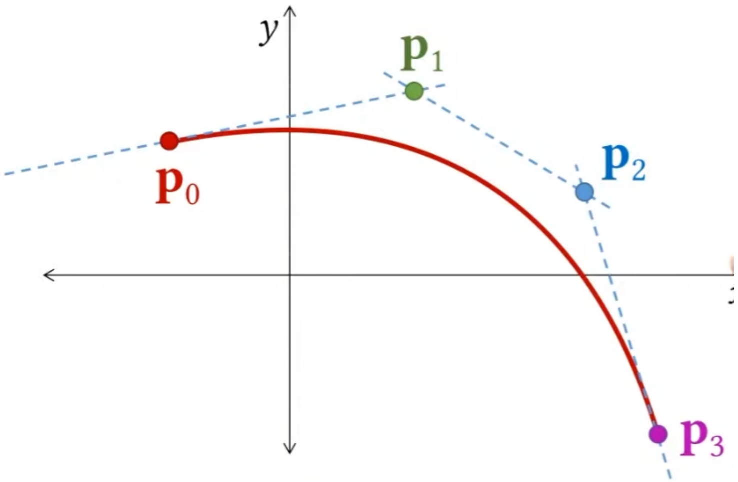
$$\mathbf{f}(t) = (1-t)^2\mathbf{p}_0 + 2(1-t)t\,\mathbf{p}_1 + t^2\,\mathbf{p}_2$$

Cubic:

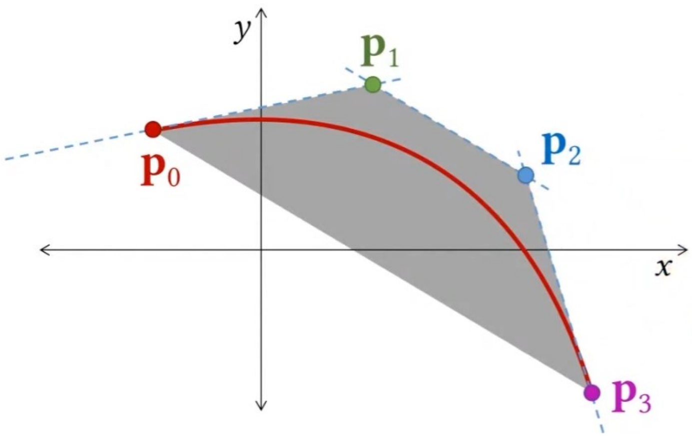
$$\mathbf{f}(t) = (1-t)^3\mathbf{p}_0 + 3(1-t)^2t\,\mathbf{p}_1 + 3(1-t)t^2\,\mathbf{p}_2 + t^3\,\mathbf{p}_3$$

Οι καμπύλες Bezier μπορούν να αναπαραστήσουν polynomial (πολυωνυμικές) καμπύλες. Δε μπορούν όμως πχ να αναπαραστήσουν έναν κύκλο.

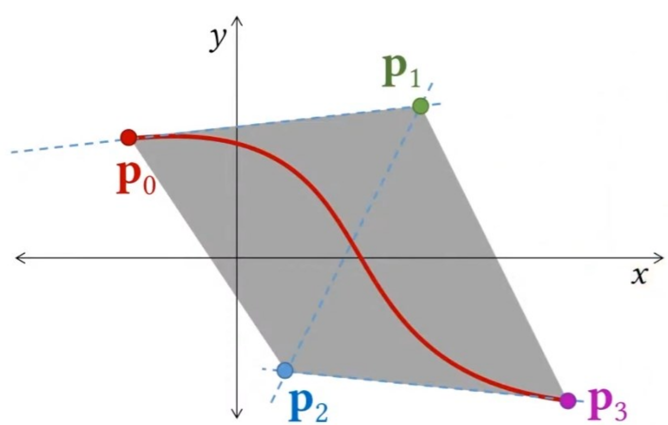
- Interpolate the first and the last control points



- Remain inside the convex hull of the control points



- Remain inside the convex hull of the control points

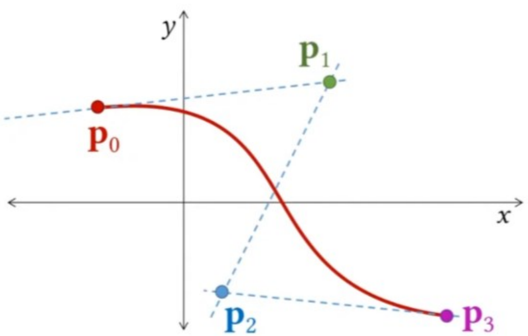


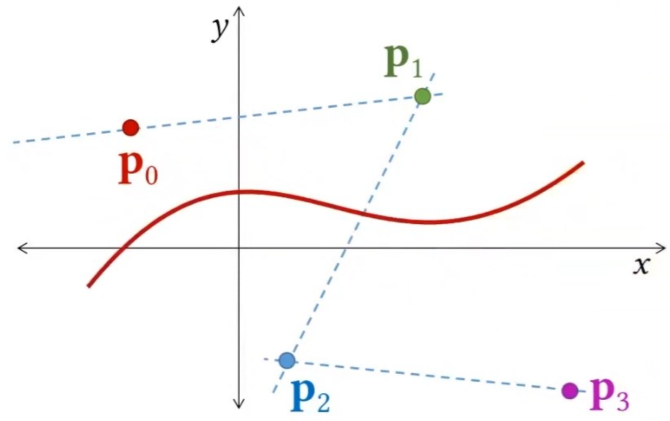
Ιδιότητες των Bezier Curves

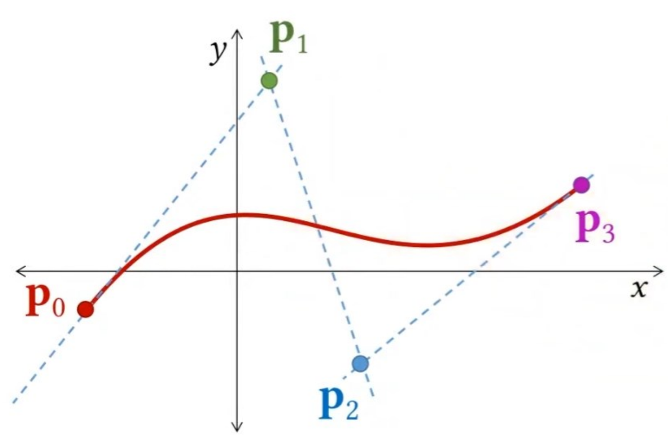
Καμπύλες

Μια άλλη **πολύ σημαντική ιδιότητα** των καμπυλών Bezier **είναι ότι μπορώ να εφαρμόσω affine transformations στις καμπύλες (rotation, transposition, scaling) εφαρμόζοντάς τους μετασχηματισμούς στα σημεία ελέγχου τους!** Οπότε αν πχ θέλω να μετατοπίσω κατά x,y,z στο χώρο την καμπύλη , δεν έχω παρά να μετατοπίσω κάθε σημείο ελέγχου κατά x,y,z .

- Are **affine invariant**

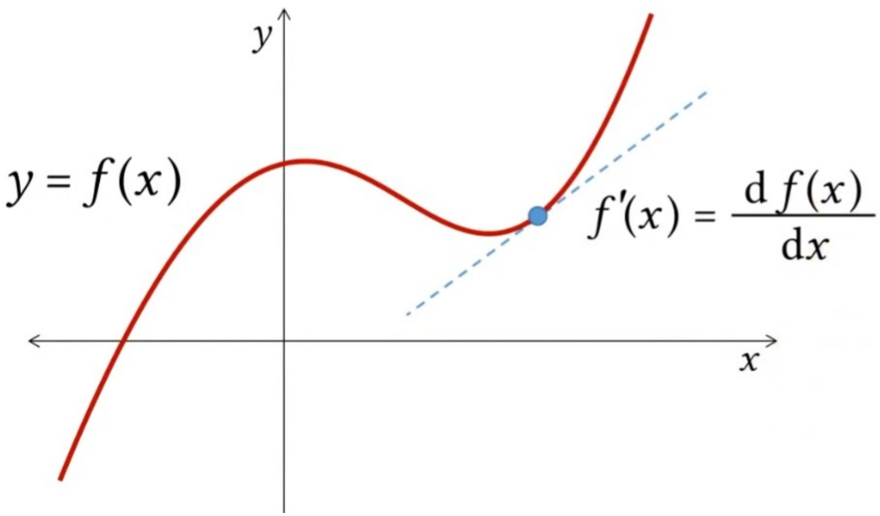






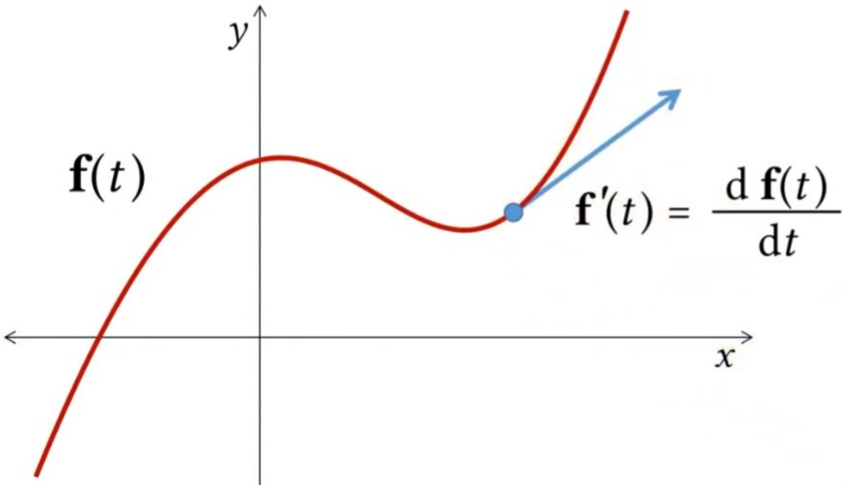
Αντί λοιπόν πχ να ζωγραφίσω την καμπύλη και να την περιστρέψω, μπορώ να περιστρέψω τα σημεία ελέγχου και θα μου δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Derivatives



Αν έχουμε μια συνάρτηση f(x) η παράγωγός της, σε κάθε σημείο x, εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης στο κάθε σημείο.

Καμπύλες



Αν πάρουμε τώρα την παραμετρική έκφραση της συνάρτησης , f(t), τότε η παράγωγος σε κάθε σημείο μου δίνει ένα διάνυσμα που εκφράζει την κατεύθυνση της εφαπτομένης στο σημείο εκείνο. Αυτό γιατί πλέον η f(t) είναι διανυσματική συνάρτηση.

Όποτε χρειαζόμαστε λοιπόν να διαπιστώσουμε την κατεύθυνση κίνησης μιας καμπύλης σε ένα σημείο , θα χρησιμοποιούμε την παράγωγό της στο σημείο αυτό f’(t).

Καμπύλες

Derivatives of Bézier Curves

$$\mathbf{f}(t) = (1-t)^3\mathbf{p}_0 + 3(1-t)^2 t\,\mathbf{p}_1 + 3(1-t)t^2\,\mathbf{p}_2 + t^3\,\mathbf{p}_3$$

$$\mathbf{f}'(t) = (1-t)^2\, 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + 2(1-t)^2 t\; 3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + t^2\, 3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)$$

Η παράγωγος λοιπόν μιας κυβικής καμπύλης Bezier θα είναι μια τετραγωνική καμπύλη Bezier.

Τα διανύσματα μπορούν να αντιπροσωπεύουν δύο πράγματα:

- Θέση (συντεταγμένες)
- Διεύθυνση

Υπό αυτό το πρίσμα, ενώ η κυβική καμπύλη Bezier δίνει διανύσματα θέσεων, η παράγωγός της δίνει διανύσματα διεύθυνσης.

Καμπύλες

$$\mathbf{f}(t) = (1-t)^3\mathbf{p}_0 + 3(1-t)^2 t\,\mathbf{p}_1 + 3(1-t)t^2\,\mathbf{p}_2 + t^3\,\mathbf{p}_3$$

$$\mathbf{f}'(t) = (1-t)^2\, 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + 2(1-t)^2 t\; 3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + t^2\, 3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)$$

$$\mathbf{f}''(t) = (1-t)\; 6(\mathbf{p}_0 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) + t\; 6(\mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)$$

Με επιπλέον παραγώγιση, η δεύτερη παράγωγος , θα είναι μια καμπύλη Bezier πρώτου βαθμού – μια γραμμή λοιπόν.

Pierre Bézier
Renault

Paul de Casteljau
Citroën

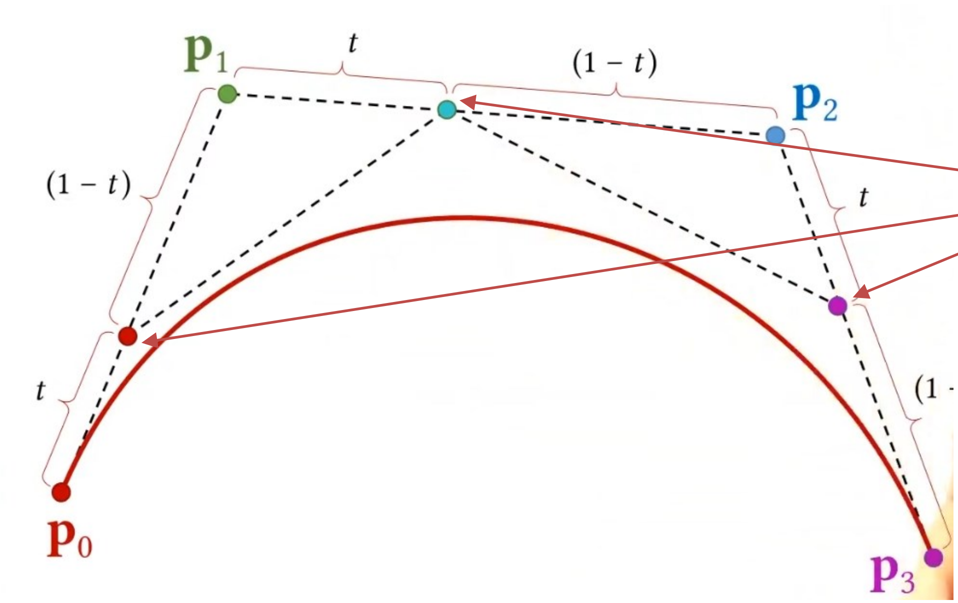
Ο Bezier εργάζονταν στη Renault και έφτασε στις καμπύλες Bezier προσπαθώντας να βρει ένα τρόπο μοντελοποίησης/περιγραφής καμπυλών για χρήση στο σχεδιασμό τμημάτων αυτοκινήτων.

Περίπου την ίδια εποχή, ένας άλλος μηχανικός της Citroen, ο Paul de Casteljau, κατέληξε στην ίδια ιδέα.

Το θέμα είναι ότι αυτά έγιναν τη δεκαετία του ‘60 , οπότε οι καμπύλες έπρεπε να μπορούν να σχεδιαστούν με το χέρι λόγω των δυνατοτήτων των υπολογιστών της εποχής.

Ο Casteljau λοιπόν σκέφτηκε έναν αλγόριθμο σχεδιασμού.

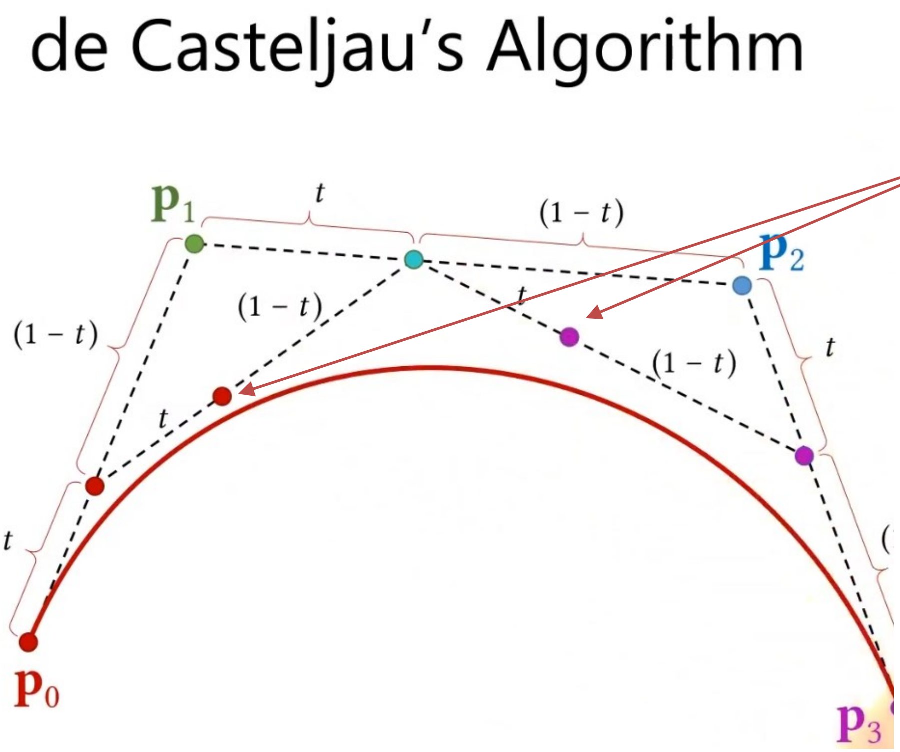
de Casteljau's Algorithm



1. Επιλέγω αρχικά μια παράμετρο t και χωρίζω τα Τμήματα $p_0 - p_1$, p_1 - p_2 και p_2-p_3 σε δύο κομμάτια το καθένα που αναλογούν στο t και το 1-t.

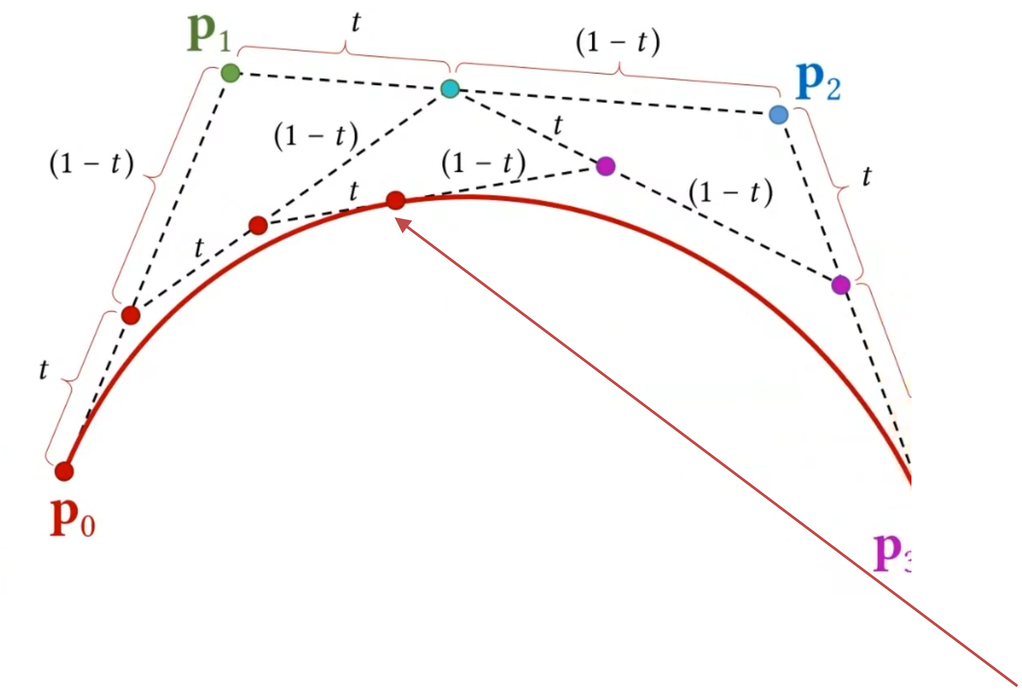
2. Έτσι πλέον ενώ αρχικά είχα 4 σημεία πλέον έχω τρία τα οποία και ενώνω.

Καμπύλες



3. Στα δύο νέα τμήματα , κάνω και πάλι το διαχωρισμό με την ίδια τιμή t οπότε πλέον έχω δύο σημεία!

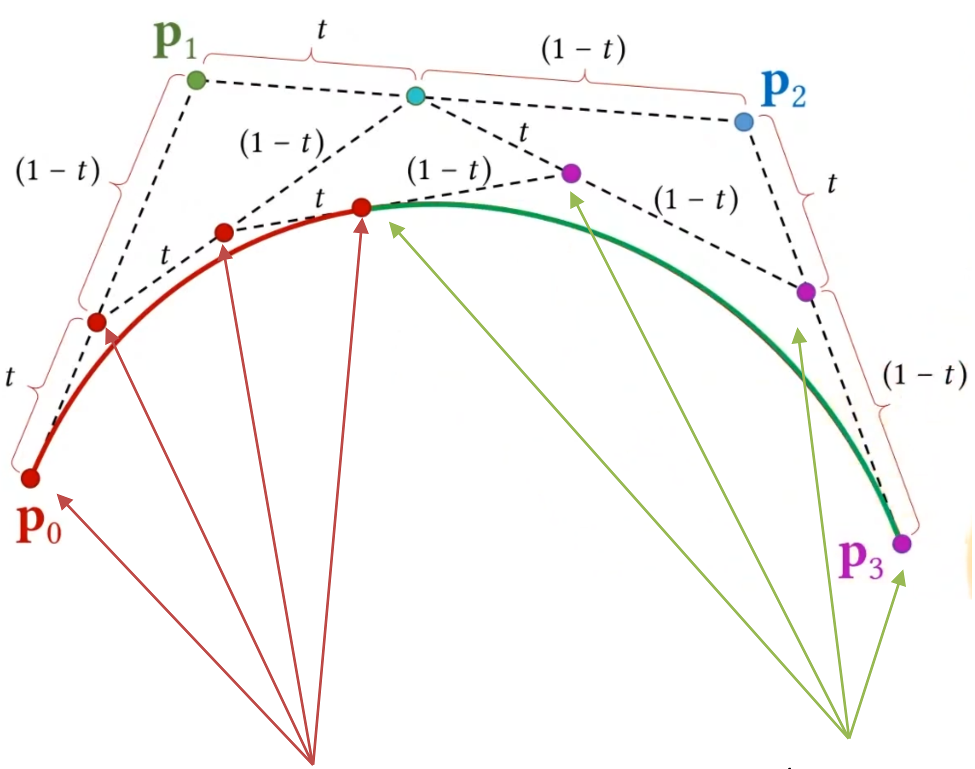
de Casteljau's Algorithm



4. Ενώνοντας τα δύο νέα σημεία και χωρίζοντα πάλι το τμήμα με την αναλογία t και (1-t) , το σημείο διαχωρισμού είναι σημείο της καμπύλης ! Και μάλλιστα είναι το σημείο που αντιστοιχεί στο f(t) !

Έτσι με τον Αλγόριθμο de Casteljau , για κάθε τιμή t , μπορώ να βρω το σημείο f(t) της καμπύλης!

de Casteljau's Algorithm



Πήραμε λοιπόν μια καμπύλη Bezier και τη σπάσαμε σε δύο υπο-καμπύλες.

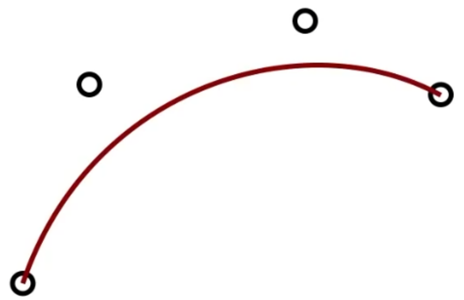
Για οποιοδήποτε λοιπόν t μπορώ να διαιρέσω την καμπύλη σε δύο κομμάτια.

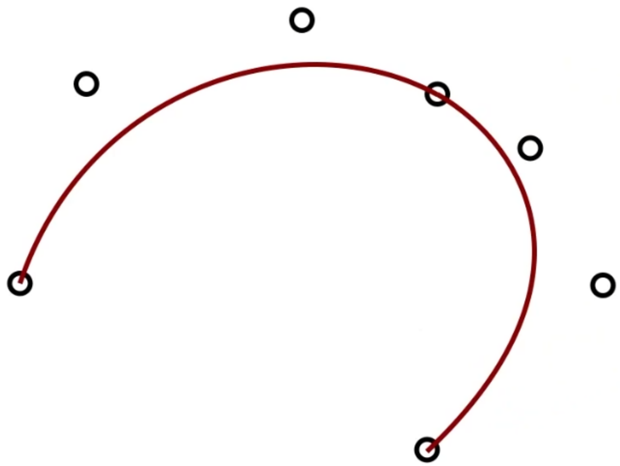
Αυτό είναι εξαιρετικά χρήσιμο στα γραφικά ΗΥ καθώς διαιρώντας σε όλο και μικρότερα κομμάτια τις καμπύλες, φτάνω σε ένα σημείο που αυτά μπορούν να προσεγγιστούν με ευθύγραμμα τμήματα!

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο είναι το γεγονός ότι τα τέσσερα σημεία ορίζουν ένα από τα τμήματα της καμπύλης.

Και αυτά τα 4 σημεία ορίζουν το υπόλοιπο τμήμα της καμπύλης!

Piecewise Polynomial Curves





Όταν θέλω να σχεδιάσω μεγάλου μήκους καμπύλες, αντί να χρησιμοποιώ καμπύλες Bezier μεγαλύτερης τάξης από το 3 (κυβικές), μπορώ να χρησιμοποιήσω μικρότερες κυβικές καμπύλες Bezier .

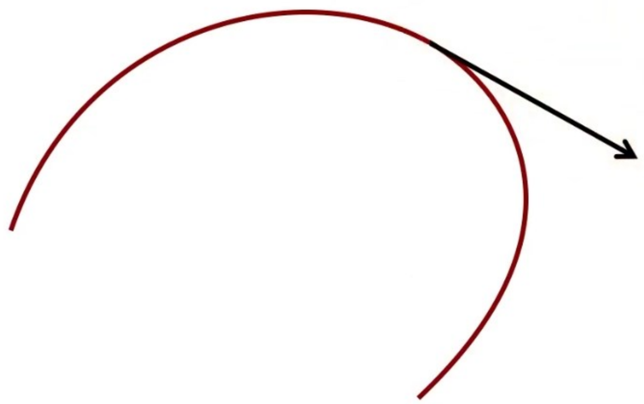
Τι γίνεται όμως στο σημείο ένωσης; Είναι συνεχόμενες;

Υπάρχει η C^0 συνέχεια , όπου για τη δεύτερη καμπύλη χρησιμοποιούμε το τελευταίο control point της πρώτης οπότε και οι δύο καμπύλες εφάπτονται και δεν είναι χωριστές.

Piecewise Polynomial Curves

C^1 continuity

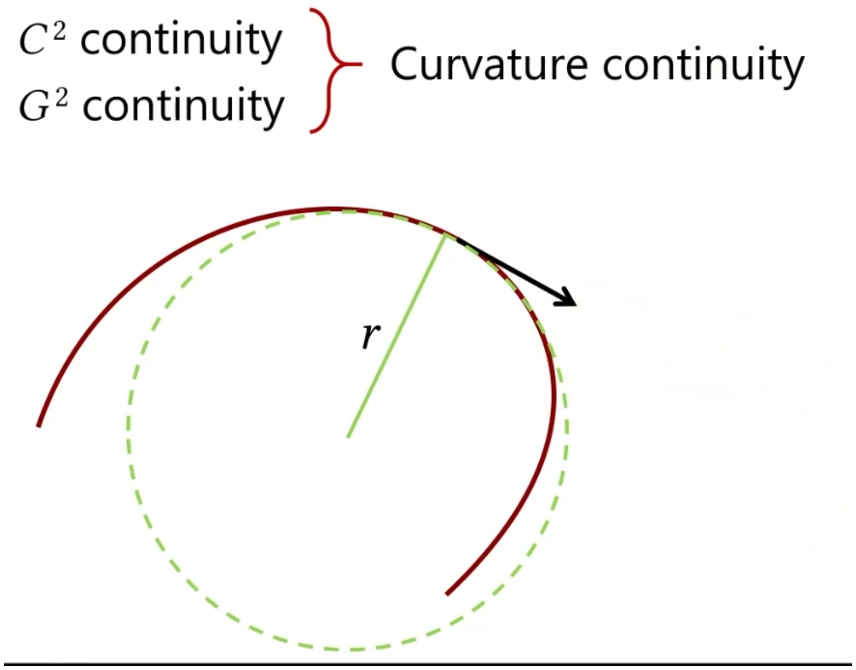
G^1 continuity



Στη συνέχεια C^1 θέλω η κατεύθυνση να συνεχίζεται στο σημείο επαφής, δηλαδή η παράγωγος των δύο καμπυλών στο συγκεκριμένο σημείο να είναι ίδια στην κατεύθυνση και το μέγεθος.

Αν οι δύο παράγωγοι είναι ίδιες στη διεύθυνση αλλά διαφέρουν στο μέγεθος τότε έχω G^1 συνέχεια.

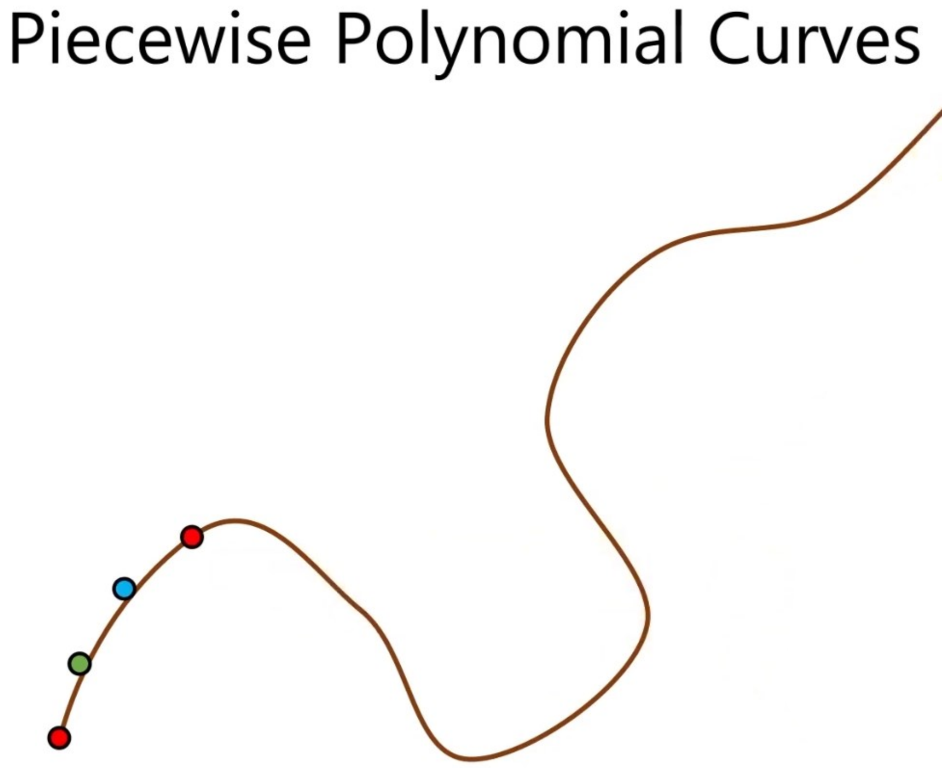
Οι C1 Και G1 λοιπόν αναφέρονται στη συνέχεια της κατεύθυνσης της καμπύλης.



Η C2 και G2 συνέχεια αναφέρεται **στη δεύτερη παράγωγο.**

Ουσιαστικά μιλάμε για τη συνεχόμενη καμπυλότητα από τη μία καμπύλη στην άλλη.

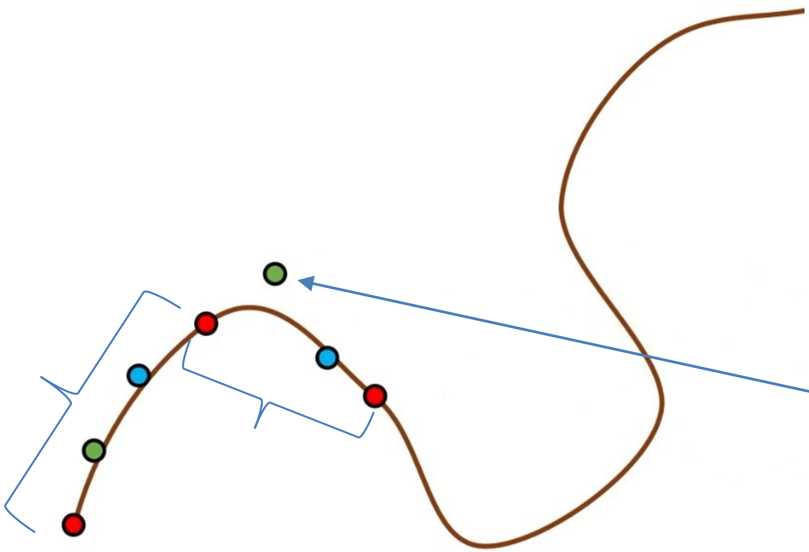
Αφορούν λοιπόν τη συνέχεια της καμπυλότητας.



Σε μια πολύπλοκη καμπύλη λοιπόν , αντί να χρησιμοποιώ πολλά control points, μπορώ να τη διαιρέσω σε τμήματα κυβικών Bezier καμπυλών.

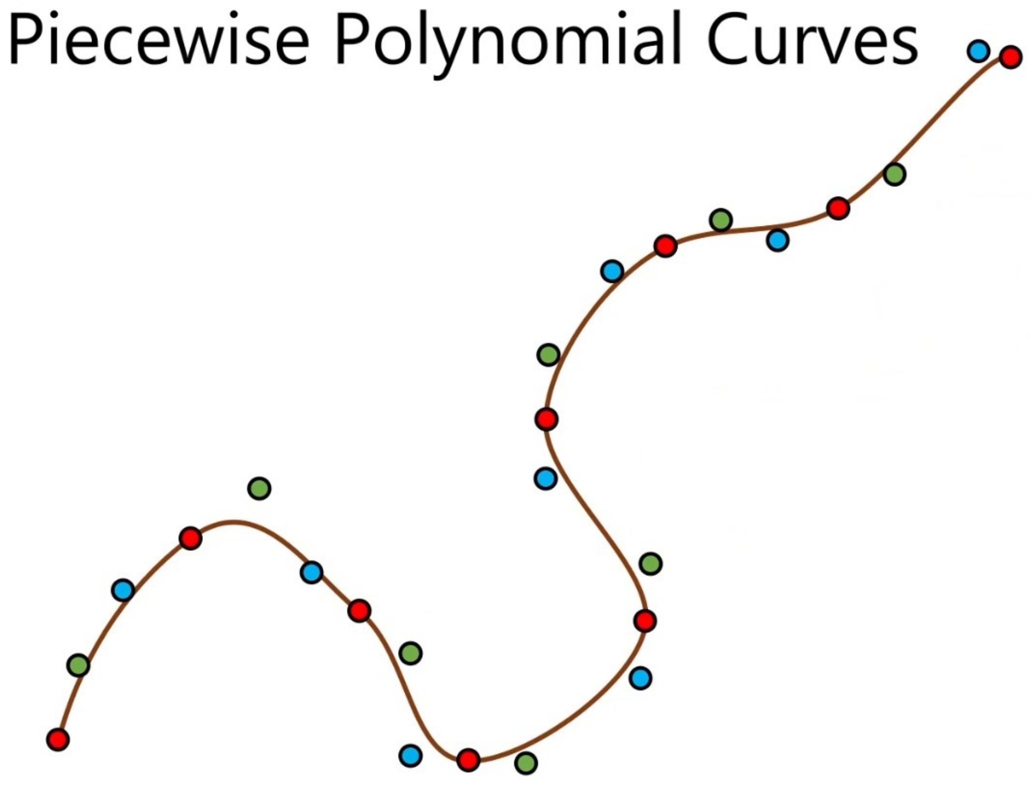
Κάθε τμήμα θα έχει 4 control points

Καμπύλες



Στη συνέχεια το επόμενο τμήμα θα μοιράζεται το ένα control point με το προηγούμενο και θα προσθέτει 3 επιπλέον.

Το δεύτερο θα πρέπει να τοποθετηθεί έτσι ώστε να εξασφαλίζει την επιθυμητή συνέχεια μεταξύ των δύο τμημάτων



Έτσι δε χρειάζεται να χρησιμοποιούμε ένα πολύ μεγάλου βαθμού πολυώνυμο για να σχεδιάσουμε μια πολύπλοκη ΄καμπύλη , αλλά την αντιμετωπίζουμε σαν ένα σύνολο κυβικών τμημάτων Bezier.