ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Αριθμητικά συστήματα

Το κεφάλαιο αυτό σας προετοιμάζει για τα Κεφάλαια 3 και 4. Στο Κεφάλαιο 3 θα δούμε πώς αποθηκεύονται τα δεδομένα στο εσωτερικό του υπολογιστή. Και, στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 4 θα εξετάσουμε πώς εκτελούνται λογικές και αριθμητικές πράξεις σε δεδομένα. Το κεφάλαιο αυτό θέτει τις απαραίτητες βάσεις για να κατανοήσετε τα θέματα των Κεφαλαίων 3 και 4. Οι αναγνώστες που γνωρίζουν ήδη τα αριθμητικά συστήματα μπορούν να παραλείψουν αυτό το κεφάλαιο και να περάσουν κατευθείαν στο Κεφάλαιο 3 χωρίς να δημιουργηθούν κενά. Τα αριθμητικά συστήματα που περιγράφουμε σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται με «χαρτί και μολύβι»: Ο τρόπος αποθήκευσης αυτών των αριθμών στον υπολογιστή περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3.

Στόχοι του κεφαλαίου

Μετά την ολοκλήρωση αυτού του κεφαλαίου, ο σπουδαστής θα είναι σε θέση:

- Να κατανοεί την έννοια των αριθμητικών συστημάτων.
- Να ξεχωρίζει τα μη θεσιακά και τα θεσιακά αριθμητικά συστήματα.
- Να περιγράφει το δεκαδικό σύστημα (βάση του 10).
- Να περιγράφει το δυαδικό σύστημα (βάση του 2).
- Να περιγράφει το δεκαεξαδικό σύστημα (βάση του 16).
- Να περιγράφει το οκταδικό σύστημα (βάση του 8).
- Να μετατρέπει αριθμούς του δυαδικού, οκταδικού ή δεκαεξαδικού συστήματος στο δεκαδικό.
- Να μετατρέπει αριθμούς του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό, οκταδικό, και δεκαεξαδικό σύστημα.
- Να μετατρέπει αριθμούς του δυαδικού συστήματος στο οκταδικό και το αντίστροφο.
- Να μετατρέπει αριθμούς του δυαδικού συστήματος στο δεκαεξαδικό και το αντίστροφο.
- Να υπολογίζει το πλήθος των ψηφίων που απαιτούνται σε κάθε σύστημα για την αναπαράσταση μιας συγκεκριμένης τιμής.

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα **αριθμητικό σύστημα** (ή σύστημα αριθμών) ορίζει τον τρόπο αναπαράστασης ενός αριθμού με διακεκριμένα σύμβολα. Ένας αριθμός αναπαρίσταται με διαφορετικό τρόπο σε κάθε σύστημα. Για παράδειγμα, και οι δύο αριθμοί $(2A)_{16}$ και $(52)_8$ αναφέρονται στην ίδια ποσότητα, $(42)_{10}$, όμως αναπαρίστανται διαφορετικά. Ένα παρόμοιο παράδειγμα είναι η γαλλική λέξη *cheval* και η λατινική *equus*, όπου και οι δύο αναφέρονται στο ίδιο πράγμα, το άλογο.

Όπως χρησιμοποιούμε σύμβολα (χαρακτήρες) για να δημιουργούμε λέξεις σε κάθε γλώσσα, έτσι χρησιμοποιούμε σύμβολα (ψηφία) για την αναπαράσταση των αριθμών. Ωστόσο, το πλήθος των συμβόλων (χαρακτήρων) κάθε γλώσσας είναι περιορισμένο. Οπότε, για να δημιουργούμε λέξεις, πρέπει να επαναλαμβάνουμε και να συνδυάζουμε χαρακτήρες. Το ίδιο συμβαίνει και με τους αριθμούς: Επειδή το πλήθος των συμβόλων (ψηφίων) για την αναπαράσταση αριθμών είναι περιορισμένο, κάποια ψηφία πρέπει να επαναλαμβάνονται.

Στο παρελθόν έχουν χρησιμοποιηθεί αρκετά αριθμητικά συστήματα, τα οποία μπορούν να διαχωριστούν σε δύο ομάδες: σε θεσιακά (positional) και σε μη θεσιακά (non-positional) συστήματα. Ο βασικός στόχος μας είναι η περιγραφή των θεσιακών αριθμητικών συστημάτων, αλλά παραθέτουμε και παραδείγματα μη θεσιακών συστημάτων.

2.2 ΘΕΣΙΑΚΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σε ένα **θεσιακό αριθμητικό σύστημα**, η θέση που καταλαμβάνει ένα σύμβολο σε έναν αριθμό καθορίζει την τιμή που αντιπροσωπεύει. Σε ένα τέτοιο σύστημα, ένας αριθμός που αναπαρίσταται ως:

$$\pm\, (S_{k-1} \ldots S_2, S_1, S_0, S_{-1}, S_{-2} \ldots S_{-l})_b$$

έχει την τιμή:

$$n = \pm \quad S_{k-1} \times b^{k-1} + \ldots + S_1 \times b^1 + S_0 \times b^0 \quad + \quad S_{-1} \times b^{-1} + S_{-2} \times b^{-2} + \ldots + S_{-l} \times b^{-l}$$

όπου S είναι το σύνολο των συμβόλων, b είναι η **βάση** (base ή και **radix**), που ισούται με το συνολικό πλήθος των συμβόλων στο σύνολο S, και τα S_k και S_{-l} είναι τα σύμβολα για το ακέραιο και το κλασματικό μέρος του αριθμού, αντίστοιχα. Έχουμε χρησιμοποιήσει μια έκφραση η οποία μπορεί να επεκταθεί από τα δεξιά ή από τα αριστερά. Με άλλα λόγια, η δύναμη (ο εκθέτης) του b μπορεί να είναι 0 έως $k - 1$ προς μία κατεύθυνση και -1 έως $-l$ προς την άλλη κατεύθυνση. Οι όροι με τις μη αρνητικές δυνάμεις του b σχετίζονται με το ακέραιο μέρος του αριθμού, ενώ οι όροι με τις αρνητικές δυνάμεις του b σχετίζονται με το κλασματικό μέρος του αριθμού. Το σύμβολο ± υποδηλώνει ότι ο αριθμός μπορεί να είναι είτε θετικός είτε αρνητικός. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε μερικά θεσιακά αριθμητικά συστήματα.

2.2.1 Το δεκαδικό σύστημα (βάση 10)

Το πρώτο θεσιακό αριθμητικό σύστημα που θα περιγράψουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι το **δεκαδικό σύστημα**. Το σύστημα αυτό έχει ως βάση το 10 ($b = 10$) και χρησιμοποιεί δέκα σύμβολα για την αναπαράσταση αριθμών. Το σύνολο των συμβόλων είναι $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Όπως ήδη γνωρίζουμε, τα σύμβολα αυτού του συστήματος ονομάζονται **δεκαδικά ψηφία**, ή απλώς ψηφία. Αν και σε αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιούμε το ± για να υποδηλώνουμε ότι ένας αριθμός μπορεί να είναι θετικός ή αρνητικός, ας μην ξεχνάμε ότι αυτά τα πρόσημα δεν αποθηκεύονται στους υπολογιστές, οι οποίοι τα χειρίζονται διαφορετικά, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 3.

Οι υπολογιστές αποθηκεύουν τους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς με διαφορετικό τρόπο.

Στο δεκαδικό σύστημα, ένας αριθμός μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\pm\,(S_{k-1} \ldots S_2, S_1, S_0, S_{-1}, S_{-2} \ldots S_{-l})_{10}$$

όμως, χάριν απλότητας, συνήθως παραλείπουμε τις παρενθέσεις, τη βάση, και το πρόσημο συν (αν ο αριθμός είναι θετικός). Για παράδειγμα, ο αριθμός $+(552{,}23)_{10}$ γράφεται 552,23 –η βάση και το θετικό πρόσημο υπονοούνται.

Ακέραιοι

Οι **ακέραιοι** (ολόκληροι αριθμοί χωρίς κλασματικό μέρος) στο δεκαδικό σύστημα είναι γνωστοί σε όλους μας αφού τους χρησιμοποιούμε συνεχώς στην καθημερινή ζωή μας. Μάλιστα, τους χρησιμοποιούμε τόσο συχνά ώστε πλέον τους αντιλαμβανόμαστε «διαισθητικά». Ένας ακέραιος αναπαρίσταται ως εξής: $\pm\, S_{k-1} \ldots S_1\, S_0$. Η τιμή υπολογίζεται ως εξής:

$$N = \pm \quad S_{k-1} \times 10^{k-1} + S_{k-2} \times 10^{k-2} + \ldots + S_2 \times 10^2 + S_1 \times 10^1 + S_0 \times 10^0$$

όπου S_k είναι ένα ψηφίο, $b = 10$ είναι η βάση, και k είναι το πλήθος των ψηφίων.

Ένας άλλος τρόπος για να γράψουμε έναν ακέραιο αριθμό σε ένα αριθμητικό σύστημα είναι με τη χρήση **τιμών θέσης** (place values), οι οποίες στο δεκαδικό σύστημα είναι δυνάμεις του 10 (10^0, 10^1, … 10^{k-1}). Στην Εικόνα 2.1 παρουσιάζεται ένας ακέραιος στο δεκαδικό σύστημα με τιμές θέσης.

Εικόνα 2.1 *Τιμές θέσης για έναν ακέραιο αριθμό στο δεκαδικό σύστημα*

	10^{k-1}	10^{k-2}	• • •	10^2	10^1	10^0	Τιμές θέσης
±	S_{k-1}	S_{k-2}	• • •	S_2	S_1	S_0	Αριθμός
	↓	↓		↓	↓	↓	

$N = \pm\, S_{k-1} \times 10^{k-1} + S_{k-2} \times 10^{k-2} + \bullet\bullet\bullet + S_2 \times 10^2 + S_1 \times 10^1 + S_0 \times 10^0$ Τιμές

Παράδειγμα 2.1

Σε αυτό το παράδειγμα παρουσιάζονται οι τιμές θέσης για τον ακέραιο +224 στο δεκαδικό σύστημα.

		10^2		10^1		10^0	Τιμές θέσης
		2		2		4	Αριθμός
N =	+	2×10^2	+	2×10^1	+	4×10^0	Τιμές

Το ψηφίο 2 στη θέση 1 έχει την τιμή 20, όμως το ίδιο ψηφίο στη θέση 2 έχει την τιμή 200. Επιπλέον, να σημειώσουμε ότι το σύμβολο συν συνήθως παραλείπεται, αν και υπονοείται.

Παράδειγμα 2.2

Σε αυτό το παράδειγμα παρουσιάζονται οι τιμές θέσης για τον δεκαδικό αριθμό –7508. Αντί για δυνάμεις του 10 έχουμε χρησιμοποιήσει τους αριθμούς 1, 10, 100, και 1000.

	1000		100		10		1	Τιμές θέσης
	7		5		0		8	Αριθμός
N = −	(7 × 1000	+	5 × 100	+	0 × 10	+	8 × 1)	Τιμές

Μέγιστη τιμή

Ορισμένες φορές πρέπει να γνωρίζουμε τη μέγιστη τιμή ενός δεκαδικού ακεραίου που μπορεί να αναπαρασταθεί με k ψηφία. Για τον υπολογισμό αυτής της μέγιστης τιμής χρησιμοποιούμε τον τύπο $N_{max} = 10^k - 1$. Για παράδειγμα, αν $k = 5$, τότε η μέγιστη τιμή είναι $N_{max} = 10^5 - 1 = 99\,999$.

Πραγματικοί αριθμοί

Στο δεκαδικό σύστημα είμαστε εξοικειωμένοι και με τους **πραγματικούς αριθμούς** (δηλαδή αριθμούς που έχουν κλασματικό μέρος). Για παράδειγμα, χρησιμοποιούμε αυτό το σύστημα για την αναπαράσταση ευρώ και λεπτών (23,40€). Ένας πραγματικός αριθμός αναπαρίσταται ως εξής: $\pm S^{k-1} \ldots S_1\, S_0, S_{-1} \ldots S_{-l}$. Η τιμή υπολογίζεται ως εξής:

$$R = \pm \underbrace{S_{k-1} \times b^{k-1} + \ldots + S_1 \times 10^1 + S_0 \times 10^0}_{\text{Ακέραιο μέρος}} + \underbrace{S_{-1} \times 10^{-1} + \ldots + S_{-1} \times 10^{-1}}_{\text{Κλασματικό μέρος}}$$

όπου S_i είναι ένα ψηφίο, $b = 10$ είναι η βάση, k είναι το πλήθος των ψηφίων στο δεκαδικό μέρος, και l είναι το πλήθος των ψηφίων στο κλασματικό μέρος. Η υποδιαστολή διαχωρίζει το κλασματικό μέρος από το ακέραιο.

Παράδειγμα 2.3

Σε αυτό το παράδειγμα παρουσιάζονται οι τιμές θέσης για τον πραγματικό αριθμό +24,13.

	10^1		10^0		10^{-1}		10^{-2}	Τιμές θέσης
	2		4	,	1		3	Αριθμός
R = +	2 × 10	+	4 × 1	+	1 × 0,1	+	3 × 0,01	Τιμές

2.2.2 Το δυαδικό σύστημα (βάση 2)

Το δεύτερο θεσιακό αριθμητικό σύστημα που περιγράφουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι το **δυαδικό σύστημα**. Σε αυτό το σύστημα η βάση είναι το 2 ($b = 2$), και χρησιμοποιούνται μόνο δύο σύμβολα, $S = \{0, 1\}$. Τα σύμβολα αυτού του συστήματος συχνά αναφέρονται ως **δυαδικά ψηφία** ή **bit** (από τον όρο **bi**nary digi**t**). Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 3, τα δεδομένα και τα προγράμματα αποθηκεύονται στον υπολογιστή με τη μορφή δυαδικών σχημάτων, δηλαδή συμβολοσειρών από bit. Αυτό συμβαίνει επειδή ο υπολογιστής αποτελείται από ηλεκτρονικούς διακόπτες που μπορούν να βρίσκονται μόνο σε μία από δύο καταστάσεις, ανοιχτοί ή κλειστοί (on ή off). Το bit 1 αντιπροσωπεύει τη μία από αυτές τις καταστάσεις και το bit 0 την άλλη.

Ακέραιοι αριθμοί

Ένας ακέραιος αναπαρίσταται ως εξής: $\pm (S_{k-1} \ldots S_1\, S_0)_2$. Η τιμή υπολογίζεται ως εξής:

$$N = \pm\, S_{k-1} \times 2^{k-1} + S_{k-2} \times 2^{k-2} + \ldots + S_2 \times 2^2 + S_1 \times 2^1 + S_0 \times 2^0$$

όπου S_i είναι ένα ψηφίο, $b = 2$ είναι η βάση, και k είναι το πλήθος των bit. Ένας άλλος τρόπος για να γράψουμε έναν δυαδικό αριθμό είναι με τη χρήση τιμών θέσης ($2^0, 2^1, \ldots 2^{k-1}$). Στην Εικόνα 2.2 παρουσιάζεται ένας αριθμός στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα με τη χρήση τιμών θέσης:

Εικόνα 2.2 *Τιμές θέσης για έναν ακέραιο αριθμό στο δεκαδικό σύστημα*

	2^{k-1}	2^{k-2}	• • •	2^2	2^1	2^0	Τιμές θέσης
±	S_{k-1}	S_{k-2}	• • •	S_2	S_1	S_0	Αριθμός
	↓	↓		↓	↓	↓	

$$N = \pm\ S_{k-1} \times 2^{k-1} + S_{k-2} \times 2^{k-2} + \bullet\bullet\bullet + S_2 \times 2^2 + S_1 \times 2^1 + S_0 \times 2^0$$ Τιμές

Παράδειγμα 2.4

Σε αυτό το παράδειγμα αποδεικνύεται ότι ο αριθμός $(11001)_2$ στο δυαδικό σύστημα είναι ο αριθμός 25 στο δεκαδικό σύστημα. Ο δείκτης 2 υποδηλώνει ότι η βάση είναι το 2.

		2^4		2^3		2^2		2^1		2^0	Τιμές θέσης
		1		1		0		0		1	Αριθμός
N	=	1×2^4	+	1×2^3	+	0×2^2	+	0×2^1	+	1×2^0	Δεκαδικός

Ο αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός είναι $N = 16 + 8 + 0 + 0 + 1 = 25$.

Μέγιστη τιμή

Η μέγιστη τιμή ενός δυαδικού ακεραίου με k ψηφία είναι $N_{\max} = 2^k - 1$. Για παράδειγμα, αν $k = 5$, τότε η μέγιστη τιμή είναι $N_{\max} = 2^5 - 1 = 31$.

Πραγματικοί αριθμοί

Ένας πραγματικός αριθμός –δηλαδή ένας αριθμός που μπορεί να έχει κλασματικό μέρος– στο δυαδικό σύστημα μπορεί να αποτελείται από k bit αριστερά της υποδιαστολής και από l bit δεξιά της υποδιαστολής, δηλαδή: $\pm(S^{k-1} \ldots S_1\, S_0, S_{-1} \ldots S_{-l})_2$. Η τιμή υπολογίζεται ως εξής:

	Ακέραιο μέρος	,	Κλασματικό μέρος
$R = \pm$	$S_{k-1} \times 2^{k-1} + \ldots + S_1 \times 2^1 + S_0 \times 2^0$	+	$S_{-1} \times 2^{-1} + \ldots + S_{-l} \times 2^{-l}$

όπου S_i είναι ένα ψηφίο, $b = 2$ είναι η βάση, k είναι το πλήθος των bit αριστερά της υποδιαστολής και l είναι το πλήθος των bit δεξιά της υποδιαστολής. Το k ξεκινά από το 0, όμως το l ξεκινά από το -1. Η υψηλότερη δύναμη (εκθέτης) είναι $k - 1$ και η χαμηλότερη είναι $-l$.

Παράδειγμα 2.5

Σε αυτό το παράδειγμα αποδεικνύεται ότι ο αριθμός $(101{,}11)_2$ στο δυαδικό σύστημα είναι ίσος με τον αριθμό 5,75 στο δεκαδικό σύστημα.

		2^2		2^1		2^0		2^{-1}		2^{-2}	Τιμές θέσης
		1		0		1	,	1		1	Αριθμός
R	=	1×2^2	+	0×2^1	+	1×2^0	+	1×2^{-1}	+	1×2^{-2}	Τιμές

Η τιμή στο δεκαδικό σύστημα είναι $R = 4 + 0 + 1 + 0{,}5 + 0{,}25 = 5{,}75$.

2.2.3 Το δεκαεξαδικό σύστημα (βάση 16)

Παρόλο που το δυαδικό σύστημα χρησιμοποιείται για την αποθήκευση δεδομένων σε υπολογιστές, δεν εξυπηρετεί στην αναπαράσταση αριθμών έξω από τον υπολογιστή αφού ένας αριθμός στον δυαδικό συμβολισμό είναι πολύ πιο μακροσκελής από τον αντίστοιχο αριθμό στον δεκαδικό συμβολισμό. Ωστόσο, το δεκαδικό σύστημα δεν δείχνει τι αποθηκεύεται στον υπολογιστή ως δυαδικό σχήμα απευθείας, αφού δεν υπάρχει προφανής σχέση ανάμεσα στο πλήθος των bit στο δυαδικό σύστημα και το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων. Επιπλέον, η μετατροπή από το ένα σύστημα στο άλλο δεν είναι γρήγορη διαδικασία, όπως θα δούμε σύντομα.

Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος επινοήθηκαν δύο θεσιακά συστήματα: το δεκαεξαδικό και το οκταδικό. Πρώτα θα αναφερθούμε στο **δεκαεξαδικό σύστημα**, που είναι πιο συνηθισμένο. Το σύστημα αυτό έχει ως βάση το 16 ($b = 16$) και χρησιμοποιεί δεκαέξι σύμβολα για την αναπαράσταση αριθμών. Το σύνολο των συμβόλων είναι $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$. Τα σύμβολα A, B, C, D, E, F (κεφαλαία ή πεζά) αντιστοιχούν στα 10, 11, 12, 13, 14, και 15, αντίστοιχα. Τα σύμβολα αυτού του συστήματος συχνά αναφέρονται και ως **δεκαεξαδικά ψηφία**.

Ακέραιοι αριθμοί

Ένας ακέραιος αναπαρίσταται ως εξής: $\pm\, S_{k-1} \ldots S_1\, S_0$. Η τιμή υπολογίζεται ως εξής:

$$N = \pm\, S_{k-1} \times 16^{k-1} + S_{k-2} \times 16^{k-2} + \ldots + S_2 \times 16^2 + S_1 \times 16^1 + S_0 \times 16^0$$

όπου S_i είναι ένα ψηφίο, $b = 16$ είναι η βάση, και k είναι το πλήθος των ψηφίων.

Ένας άλλος τρόπος για να γράψουμε έναν δεκαεξαδικό αριθμό είναι με τη χρήση τιμών θέσης (16^0, 16^1, … 16^{k-1}). Στην Εικόνα 2.3 παρουσιάζεται ένας αριθμός στο δεκαεξαδικό αριθμητικό σύστημα με τη χρήση τιμών θέσης.

Εικόνα 2.3 *Τιμές θέσης για έναν ακέραιο αριθμό στο δεκαεξαδικό σύστημα*

	16^{k-1}	16^{k-2}	•••	16^2	16^1	16^0	Τιμές θέσης
$\pm$	S_{k-1}	S_{k-2}	•••	S_2	S_1	S_0	Αριθμός

$$N = \pm S_{k-1} \times 16^{k-1} + S_{k-2} \times 16^{k-2} + \cdots + S_2 \times 16^2 + S_1 \times 16^1 + S_0 \times 16^0$$ Τιμές

Παράδειγμα 2.6

Σε αυτό το παράδειγμα αποδεικνύεται ότι ο αριθμός $(2AE)_{16}$ στο δεκαεξαδικό σύστημα είναι ισοδύναμος με τον αριθμό 686 στο δεκαδικό σύστημα.

	16^2		16^1		16^0	Τιμές θέσης
	2		A		E	Αριθμός
$N =$	2×16^2	+	10×16^1	+	14×16^0	Τιμές

Μέγιστη τιμή

Η μέγιστη τιμή ενός δεκαεξαδικού ακεραίου με k ψηφία είναι $N_{max} = 16^k - 1$. Για παράδειγμα, αν $k = 5$, τότε η μέγιστη τιμή είναι $N_{max} = 16^5 - 1 = 1\,048\,575$.

Πραγματικοί αριθμοί

Παρόλο που στο δεκαεξαδικό σύστημα μπορεί να αναπαρασταθούν και πραγματικοί αριθμοί, αυτή η πρακτική δεν συνηθίζεται.

2.2.4 Το οκταδικό σύστημα (βάση 8)

Το δεύτερο σύστημα που επινοήθηκε για την αναπαράσταση αριθμών του δυαδικού συστήματος με ισοδύναμούς τους έξω από τον υπολογιστή είναι το **οκταδικό σύστημα**. Το σύστημα αυτό έχει ως βάση το 8 ($b = 8$) και χρησιμοποιεί οκτώ σύμβολα για την αναπαράσταση αριθμών. Το σύνολο των συμβόλων είναι $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Τα σύμβολα αυτού του συστήματος συχνά αναφέρονται ως **οκταδικά ψηφία**.

Ακέραιοι

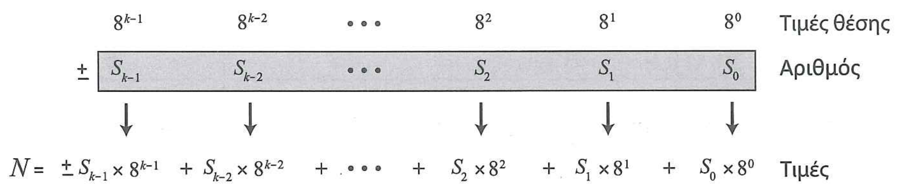
Ένας ακέραιος αναπαρίσταται ως εξής: $\pm\ S_{k-1} \ldots S_1\ S_0$. Η τιμή υπολογίζεται ως εξής:

$$N = \pm\ S_{k-1} \times 8^{k-1} + S_{k-2} \times 8^{k-2} + \ldots + S_2 \times 8^2 + S_1 \times 8^1 + S_0 \times 8^0$$

όπου S_i είναι ένα ψηφίο, $b = 8$ είναι η βάση, και k είναι το πλήθος των ψηφίων.

Ένας άλλος τρόπος για να γράψουμε έναν οκταδικό αριθμό είναι με τη χρήση τιμών θέσης (8^0, 8^1,... 8^{k-1}). Στην Εικόνα 2.4 παρουσιάζεται ένας αριθμός στο οκταδικό αριθμητικό σύστημα με τη χρήση τιμών θέσης.

Εικόνα 2.4 *Τιμές θέσης για έναν ακέραιο αριθμό στο οκταδικό σύστημα*



Παράδειγμα 2.7

Σε αυτό το παράδειγμα αποδεικνύεται ότι ο αριθμός $(1256)_8$ στο οκταδικό σύστημα είναι ο αριθμός 686 στο δεκαδικό σύστημα.

		8^3		8^2		8^1		8^0	Τιμές θέσης
		1		2		5		6	Αριθμός
N	=	1×8^3	+	2×8^2	+	5×8^1	+	6×8^0	Τιμές

Ο αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός είναι $N = 512 + 128 + 40 + 6 = 686$.

Μέγιστη τιμή

Η μέγιστη τιμή ενός οκταδικού ακεραίου με k ψηφία είναι $N_{\max} = 8^k - 1$. Για παράδειγμα, αν $k = 5$, τότε η μέγιστη τιμή είναι $N_{\max} = 8^5 - 1 = 32767$.

Πραγματικοί αριθμοί

Παρόλο που στο οκταδικό σύστημα μπορεί να αναπαρασταθούν και πραγματικοί αριθμοί, αυτή η πρακτική δεν συνηθίζεται.

2.2.5 Περίληψη των τεσσάρων θεσιακών συστημάτων

Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζεται μια σύνοψη των τεσσάρων θεσιακών αριθμητικών συστημάτων που περιγράφονται σε αυτό το κεφάλαιο.

Πίνακας 2.1 Περίληψη των τεσσάρων θεσιακών συστημάτων

Σύστημα	*Βάση*	*Σύμβολα*	*Παραδείγματα*
Δεκαδικό	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	2345,56
Δυαδικό	2	0, 1	$(1001,11)_2$
Οκταδικό	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	$(156,23)_8$
Δεκαεξαδικό	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F	$(A2C,A1)_{16}$

Στον Πίνακα 2.2 φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο ο αριθμός 15 αναπαρίσταται με δύο ψηφία στο δεκαδικό σύστημα, με τέσσερα ψηφία στο δυαδικό, με δύο ψηφία στο οκταδικό, και μόνο με ένα ψηφίο στο δεκαεξαδικό. Η δεκαεξαδική αναπαράσταση είναι αναμφίβολα η πιο συνοπτική.

Πίνακας 2.2 Συγκριτική παρουσίαση αριθμών στα τέσσερα συστήματα

Δεκαδικό	*Δυαδικό*	*Οκταδικό*	*Δεκαεξαδικό*
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

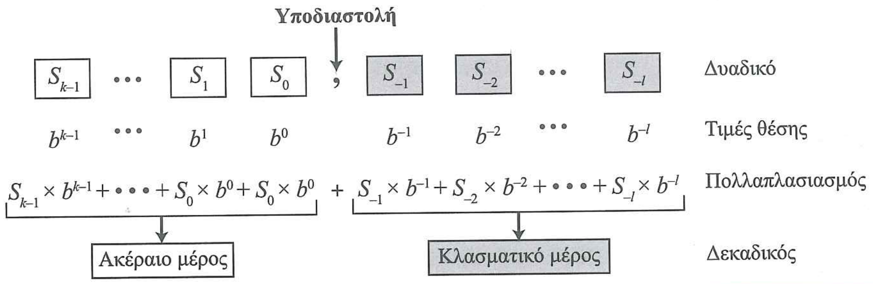
2.2.6 Μετατροπή

Πρέπει να γνωρίζουμε πώς γίνεται η μετατροπή ενός αριθμού από ένα σύστημα σε ένα άλλο σύστημα. Επειδή το δεκαδικό σύστημα είναι το πιο γνωστό, πρώτα θα δείξουμε πώς γίνεται η μετατροπή ενός αριθμού από οποιοδήποτε σύστημα στο δεκαδικό. Έπειτα θα δείξουμε πώς μετατρέπεται ένας δεκαδικός σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα. Τέλος, θα δείξουμε πώς μπορούμε να μετατρέπουμε εύκολα αριθμούς από το δυαδικό σύστημα στο δεκαεξαδικό ή το οκταδικό, και το αντίστροφο.

Μετατροπή από οποιαδήποτε βάση στο δεκαδικό σύστημα

Αυτός ο τύπος μετατροπής είναι εύκολος και γρήγορος. Πρώτα πολλαπλασιάζουμε κάθε ψηφίο με την τιμή θέσης του στο σύστημα από το οποίο μετατρέπουμε, και κατόπιν προσθέτουμε τα αποτελέσματα για να υπολογίσουμε τον αριθμό στο δεκαδικό σύστημα. Η διαδικασία φαίνεται στην Εικόνα 2.5.

Εικόνα 2.5 *Μετατροπή από άλλες βάσεις στο δεκαδικό σύστημα*



Παράδειγμα 2.8

Σε αυτό το παράδειγμα παρουσιάζεται η μετατροπή του δυαδικού αριθμού $(110{,}11)_2$ στο δεκαδικό σύστημα: $(110{,}11)_2 =$ 6,75.

Δυαδικός	1		1		0	,	1		1
Τιμές θέσης	2^2		2^1		2^0		2^{-1}		2^{-2}
Μερικό αποτέλεσμα	4	+	2	+	0	+	0,5	+	0,25

Δεκαδικός: 6,75

Παράδειγμα 2.9

Σε αυτό το παράδειγμα βλέπετε πώς γίνεται η μετατροπή του δεκαεξαδικού αριθμού $(1A{,}23)_{16}$ στο δεκαδικό σύστημα.

Δεκαεξαδικός	1		A	,	2		3
Τιμές θέσης	16^1		16^0		16^{-1}		16^{-2}
Μερικό αποτέλεσμα	16	+	10	+	0,125	+	0,012

Δεκαδικός: 26,137

Το αποτέλεσμα στον δεκαδικό συμβολισμό δεν είναι ακριβές επειδή $3 \times 16^{-2} = 0{,}01171875$. Εμείς έχουμε στρογγυλοποιήσει αυτή την τιμή σε τρία ψηφία (0,012). Δηλαδή, $(1A{,}23)_{16} \approx 26{,}137$. Όταν μετατρέπουμε έναν αριθμό από το δεκαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα, πρέπει να καθορίζουμε πόσα ψηφία επιτρέπονται δεξιά από την υποδιαστολή.

Παράδειγμα 2.10

Σε αυτό το παράδειγμα βλέπετε πώς γίνεται η μετατροπή του αριθμού $(23{,}17)_8$ στο δεκαδικό σύστημα.

Οκταδικός	2		3	,	1		7
Τιμές θέσης	8^1		8^0		8^{-1}		8^{-2}
Μερικό αποτέλεσμα	16	+	3	+	0,125	+	0,109

Δεκαδικός: 19,234

Αυτό σημαίνει ότι $(23{,}17)_8 \approx 19{,}234$ στο δεκαδικό σύστημα. Και εδώ, το αποτέλεσμα $7 \times 8^{-2} = 0{,}109375$ έχει στρογγυλοποιηθεί στα τρία ψηφία.

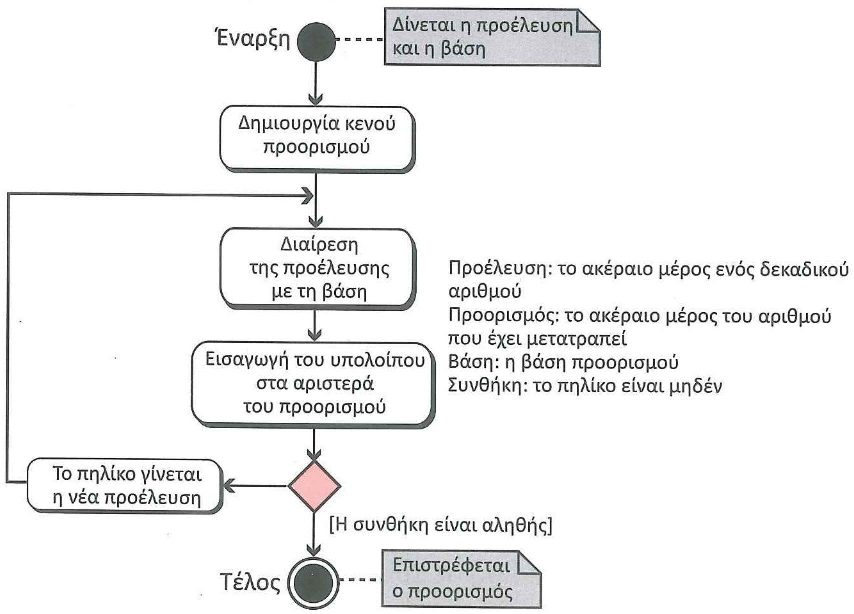
Μετατροπή δεκαδικού αριθμού σε οποιαδήποτε βάση

Ένας δεκαδικός αριθμός μπορεί να μετατραπεί στον ισοδύναμό του σε οποιαδήποτε βάση. Για τη μετατροπή αυτή απαιτούνται δύο διαδικασίες, μία για το ακέραιο μέρος και μία για το κλασματικό.

Μετατροπή του ακέραιου μέρους

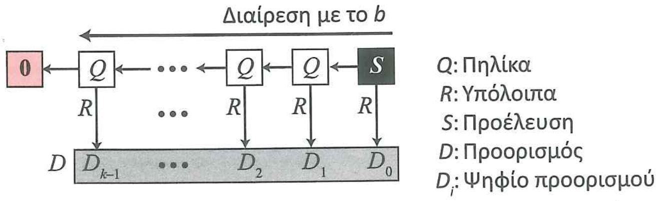
Το ακέραιο μέρος μπορεί να μετατραπεί με επανειλημμένες διαιρέσεις. Στην Εικόνα 2.6 παρουσιάζεται το διάγραμμα UML αυτής της διαδικασίας. Όπως θα διαπιστώσετε, χρησιμοποιούμε διαγράμματα UML σε ολόκληρο το βιβλίο. Οι αναγνώστες που δεν είναι εξοικειωμένοι με τα διαγράμματα UML μπορούν να ανατρέξουν στο Παράρτημα Β.

Εικόνα 2.6 *Αλγόριθμος μετατροπής του ακέραιου μέρους ενός αριθμού του δεκαδικού συστήματος σε συστήματα άλλων βάσεων*



Το ακέραιο μέρος του δεκαδικού αριθμού ονομάζεται *προέλευση* (source) και το ακέραιο μέρος του αριθμού στον οποίο μετατρέπεται ονομάζεται *προορισμός* (destination). Πρώτα δημιουργούμε έναν κενό προορισμό. Έπειτα διαιρούμε κατ' επανάληψη την προέλευση και σημειώνουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο. Εισάγουμε το υπόλοιπο στα αριστερά του προορισμού. Και έτσι, το πηλίκο γίνεται η νέα προέλευση. Στην Εικόνα 2.7 φαίνεται πώς δημιουργείται ο προορισμός με κάθε διαίρεση.

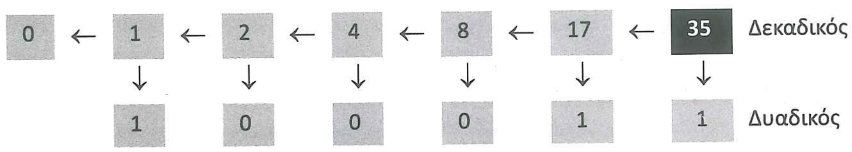
Εικόνα 2.7 *Αλγόριθμος μετατροπής του ακέραιου μέρους ενός αριθμού του δεκαδικού συστήματος σε συστήματα άλλων βάσεων – δημιουργία του νέου προορισμού σε κάθε διαίρεση*



Χρησιμοποιώντας την Εικόνα 2.7, εξηγούμε τη διαδικασία στη συνέχεια με ορισμένα παραδείγματα.

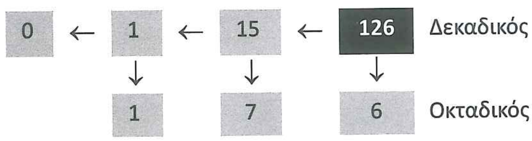
Παράδειγμα 2.11

Σε αυτό το παράδειγμα βλέπετε πώς γίνεται η μετατροπή του αριθμού 35 από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα. Ξεκινάμε με τον αριθμό στη δεκαδική μορφή, και προχωρούμε προς τα αριστερά διαιρώντας συνεχώς με το 2 για να βρίσκουμε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα. Το αποτέλεσμα είναι $35 = (100011)_2$.



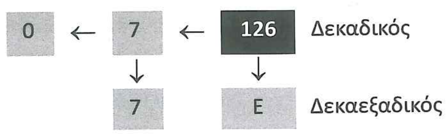
Παράδειγμα 2.12

Σε αυτό το παράδειγμα βλέπετε πώς γίνεται η μετατροπή του αριθμού 126 από το δεκαδικό στο οκταδικό σύστημα. Εδώ προχωρούμε προς τα αριστερά διαιρώντας συνεχώς με το 8 για να βρίσκουμε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα. Το αποτέλεσμα είναι $126 = (176)_8$.



Παράδειγμα 2.13

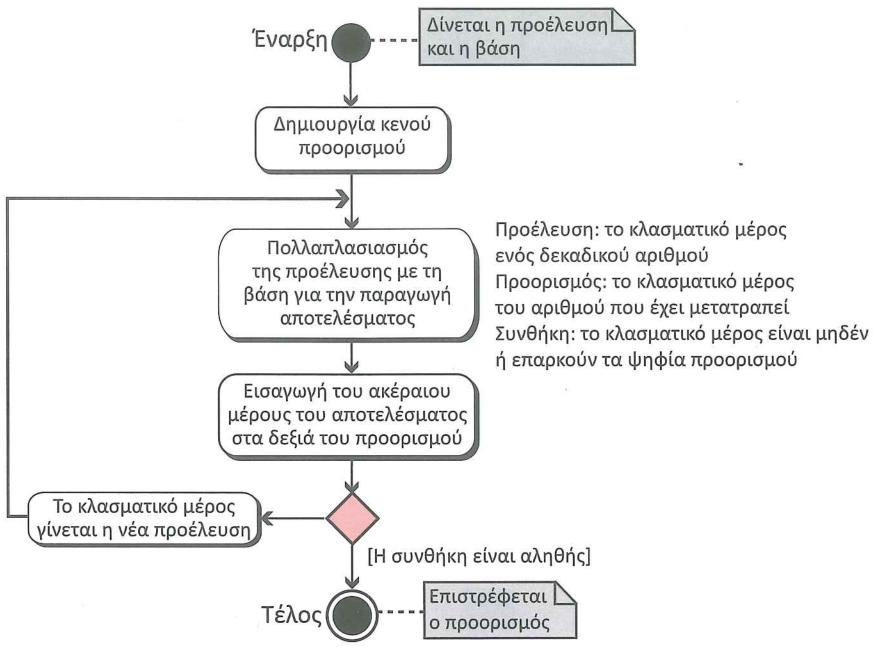
Εδώ βλέπετε πώς μετατρέπεται ο αριθμός 126 από το δεκαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα. Εδώ προχωρούμε προς τα αριστερά διαιρώντας συνεχώς με το 16 για να βρίσκουμε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα. Το αποτέλεσμα είναι $126 = (7E)_{16}$.



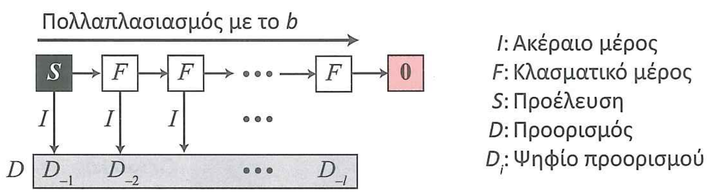
Μετατροπή του κλασματικού μέρους

Το κλασματικό μέρος μπορεί να μετατραπεί με επανειλημμένους πολλαπλασιασμούς. Το κλασματικό μέρος του δεκαδικού αριθμού ονομάζεται *προέλευση* (source) και το κλασματικό μέρος του αριθμού στον οποίο μετατρέπεται ονομάζεται *προορισμός* (destination). Πρώτα δημιουργούμε έναν κενό προορισμό. Έπειτα πολλαπλασιάζουμε συνεχώς την προέλευση και σημειώνουμε το αποτέλεσμα. Το ακέραιο μέρος του αποτελέσματος τοποθετείται στα δεξιά του προορισμού, ενώ το κλασματικό μέρος γίνεται η νέα προέλευση. Στην Εικόνα 2.8 παρουσιάζεται το διάγραμμα UML αυτής της διαδικασίας. Στην Εικόνα 2.9 μπορείτε να δείτε πώς δημιουργείται ο προορισμός με κάθε πολλαπλασιασμό. Χρησιμοποιώντας αυτή την εικόνα, εξηγούμε τη διαδικασία στη συνέχεια με ορισμένα παραδείγματα.

Εικόνα 2.8 *Αλγόριθμος μετατροπής του κλασματικού μέρους ενός αριθμού του δεκαδικού συστήματος σε συστήματα άλλων βάσεων*



Εικόνα 2.9 *Αλγόριθμος μετατροπής του ακέραιου μέρους ενός αριθμού του δεκαδικού συστήματος σε συστήματα άλλων βάσεων –δημιουργία του νέου προορισμού σε κάθε διαίρεση*



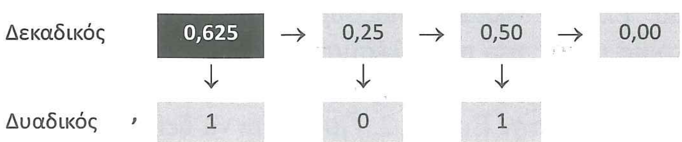
Σημείωση:
Το κλασματικό μέρος ενδέχεται να μη γίνει ποτέ μηδέν.
Όταν δημιουργηθούν αρκετά ψηφία, διακόπτουμε τη διαδικασία.

Παράδειγμα 2.14

Να μετατρέψετε τον δεκαδικό αριθμό 0,625 στο δυαδικό σύστημα.

Λύση

Από τη στιγμή που ο αριθμός 0,625 δεν έχει ακέραιο μέρος, το παράδειγμα δείχνει τον τρόπο υπολογισμού του κλασματικού μέρους. Η βάση εδώ είναι το 2. Γράφουμε τον δεκαδικό αριθμό στην αριστερή γωνία. Πολλαπλασιάζουμε συνεχώς τον αριθμό με το 2 και σημειώνουμε το ακέραιο και το κλασματικό μέρος του αποτελέσματος. Το κλασματικό μέρος προχωρά προς τα δεξιά, ενώ το ακέραιο μέρος σημειώνεται κάτω από κάθε πράξη. Σταματάμε όταν το κλασματικό μέρος γίνει 0 ή όταν σημειώσουμε αρκετά bit. Το αποτέλεσμα είναι $(0{,}101)_2$.



Παράδειγμα 2.15

Σε αυτό το παράδειγμα βλέπετε πώς γίνεται η μετατροπή του αριθμού 0,634 στο οκταδικό σύστημα με τέσσερα το πολύ ψηφία. Το αποτέλεσμα είναι 0,634 = $(0{,}5044)_8$. Τώρα πολλαπλασιάζουμε με το 8, δηλαδή τη βάση του οκταδικού συστήματος.

Δεκαδικός		0,634	→	0,072	→	0,576	→	0,608	→	0,864
		↓		↓		↓		↓		
Οκταδικός	,	5		0		4		4		

Παράδειγμα 2.16

Σε αυτό το παράδειγμα βλέπετε πώς γίνεται η μετατροπή του δεκαδικού αριθμού 178,6 στο δεκαεξαδικό σύστημα με μόνο ένα ψηφίο δεξιά της υποδιαστολής. Το αποτέλεσμα είναι 178,6 = $(\mathrm{B}2{,}9)_{16}$. Τώρα διαιρούμε ή πολλαπλασιάζουμε με το 16 (δηλαδή τη βάση του δεκαεξαδικού συστήματος).

Δεκαδικός	0	←	11	←	178	,	0,6	→	0,6
			↓		↓		↓		
Δεκαεξαδικός			B		2	,	9		

Παράδειγμα 2.17

Μια εναλλακτική μέθοδος μετατροπής ενός μικρού δεκαδικού ακεραίου (συνήθως μικρότερου του 256) στο δυαδικό σύστημα είναι με τη διάσπαση του αριθμού στα αθροίσματα που ισοδυναμούν με τις δυνάμεις του δύο:

Τιμές θέσης	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Ισοδύναμος δεκαδικός	128	64	32	16	8	4	2	1

Με βάση αυτόν τον πίνακα, ο δεκαδικός 165 μπορεί να μετατραπεί στο δυαδικό σύστημα $(10100101)_2$ ως εξής:

Δεκαδικός 165 =	128	+	0	+	32	+	0	+	0	+	4	+	0	+	1
Δυαδικός	1		0		1		0		0		1		0		1

Παράδειγμα 2.18

Παρόμοια μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μετατροπή ενός δεκαδικού κλασματικού αριθμού στο δυαδικό σύστημα όταν ο παρονομαστής είναι δύναμη του δύο:

Τιμή θέσης	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
Ισοδύναμος δεκαδικός	$^{1}/_{2}$	$^{1}/_{4}$	$^{1}/_{8}$	$^{1}/_{16}$	$^{1}/_{32}$	$^{1}/_{64}$	$^{1}/_{128}$

Με βάση αυτόν τον πίνακα, ο δεκαδικός 27/64 μπορεί να μετατραπεί στον δυαδικό ισοδύναμο $(0{,}011011)_2$ ως εξής:

Δεκαδικός $^{27}/_{64}$ =	$^{16}/_{64}$	+	$^{8}/_{64}$	+	$^{2}/_{64}$	+	$^{1}/_{64}$
	$^{1}/_{4}$	+	$^{1}/_{8}$	+	$^{1}/_{32}$	+	$^{1}/_{64}$

Αντιστοιχίζουμε αυτά τα κλάσματα στις ισοδύναμες δεκαδικές τιμές τους. Επειδή δεν εμφανίζονται τα 1/2 και 1/16, τα αντικαθιστούμε με 0.

Δεκαδικός $^{27}/_{64}$ =	0	+	$^{1}/_{4}$	+	$^{1}/_{8}$	+	0	+	$^{1}/_{32}$	+	$^{1}/_{64}$
Δυαδικός	0		1		1		0		1		1

Πλήθος ψηφίων

Προτού μετατρέψουμε έναν δεκαδικό αριθμό σε άλλες βάσεις, πρέπει να γνωρίζουμε το πλήθος των ψηφίων. Σε ένα θεσιακό σύστημα με βάση b, έχουμε πάντα τη δυνατότητα να βρούμε το πλήθος των ψηφίων ενός ακεραίου χρησιμοποιώντας τη σχέση $k = \lceil \log_b N \rceil$, όπου $\lceil x \rceil$ είναι ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του x (ονομάζεται επίσης **άνω ακέραιο μέρος** – ceiling– του x), και N είναι η δεκαδική τιμή του ακεραίου. Για παράδειγμα, μπορούμε να βρούμε το απαιτούμενο πλήθος bit στον δεκαδικό αριθμό 234 και στα τέσσερα συστήματα ως εξής:

α. Στο δεκαδικό: $k_d = \lceil \log_{10} 234 \rceil = \lceil 2{,}37 \rceil = 3$, το οποίο είναι προφανές.

β. Στο δυαδικό: $k_b = \lceil \log_2 234 \rceil = \lceil 7{,}8 \rceil = 8$. Αυτό ισχύει επειδή $234 = (11101010)_2$

γ. Στο οκταδικό: $k_o = \lceil \log_8 234 \rceil = \lceil 2{,}62 \rceil = 3$. Αυτό ισχύει επειδή $234 = (352)_8$.

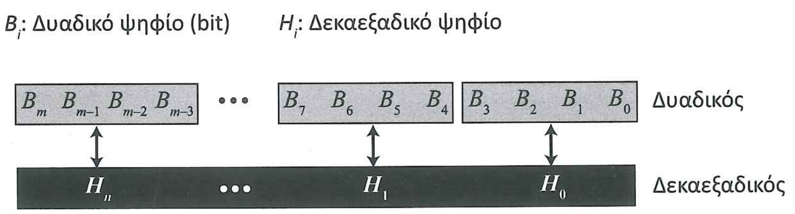
δ. Στο δεκαεξαδικό $k_h = \lceil \log_{16} 234 \rceil = \lceil 1{,}96 \rceil = 2$. Αυτό ισχύει επειδή $234 = (\text{EA})_{16}$.

Για πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο υπολογισμού του $\log_b N$, σε περίπτωση που η αριθμομηχανή σας δεν μπορεί να υπολογίσει λογαρίθμους σε οποιαδήποτε βάση, δείτε το Παράρτημα Ζ.

Μετατροπή από το δυαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα

Μπορούμε να μετατρέψουμε εύκολα έναν αριθμό από το δυαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα και το αντίστροφο. Η μετατροπή είναι εύκολη επειδή υπάρχει σχέση μεταξύ των δύο βάσεων: Τέσσερα bit στο δυαδικό σύστημα είναι ένα ψηφίο στο δεκαεξαδικό. Στην Εικόνα 2.10 μπορείτε να δείτε πώς γίνεται αυτή η μετατροπή.

Εικόνα 2.10 *Μετατροπή από το δυαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα και αντίστροφα*



Παράδειγμα 2.19

Να βρείτε το δεκαεξαδικό ισοδύναμο του δυαδικού αριθμού $(10011100010)_2$.

Λύση

Πρώτα χωρίζουμε τον δυαδικό αριθμό σε σχήματα των 4 bit: 100 1110 0010. Να σημειώσουμε ότι το πιο αριστερό σχήμα μπορεί να έχει από ένα έως τέσσερα bit. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το ισοδύναμο κάθε σχήματος, σύμφωνα με τον Πίνακα 2.2 στη σελίδα 44, για να μετατρέψουμε κάθε αριθμό στο δεκαεξαδικό σύστημα: $(4\text{E}2)_{16}$.

Παράδειγμα 2.20

Ποιο είναι το δυαδικό ισοδύναμο του $(24\text{C})_{16}$;

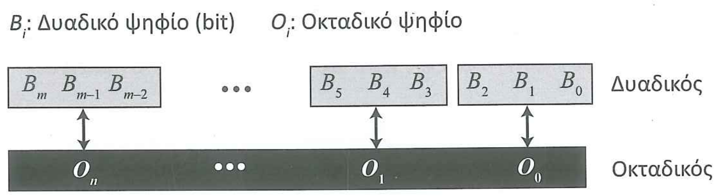
Λύση

Κάθε δεκαεξαδικό ψηφίο μετατρέπεται σε σχήματα των 4 bit: $2 \rightarrow 0010$, $4 \rightarrow 0100$ και $\text{C} \rightarrow 1100$. Το αποτέλεσμα είναι $(001001001100)_2$.

Μετατροπή από το δυαδικό στο οκταδικό σύστημα

Μπορούμε να μετατρέψουμε εύκολα έναν αριθμό από το δυαδικό στο οκταδικό σύστημα και το αντίστροφο. Η μετατροπή είναι εύκολη επειδή υπάρχει μια ενδιαφέρουσα σχέση μεταξύ των δύο βάσεων: Τρία bit του δυαδικού συστήματος είναι ένα οκταδικό ψηφίο. Στην Εικόνα 2.11 μπορείτε να δείτε πώς γίνεται αυτή η μετατροπή.

Εικόνα 2.11 *Μετατροπή από το δυαδικό στο οκταδικό σύστημα*



Παράδειγμα 2.21

Να βρείτε το οκταδικό ισοδύναμο του δυαδικού αριθμού $(101110010)_2$.

Λύση

Κάθε ομάδα των τριών bit μεταφράζεται σε ένα οκταδικό ψηφίο. Το ισοδύναμο κάθε ομάδας των 3 bit φαίνεται στον Πίνακα 2.2 στη σελ. 44. Το αποτέλεσμα είναι $(562)_8$.

Παράδειγμα 2.22

Ποιο είναι το δυαδικό ισοδύναμο του $(24)_8$;

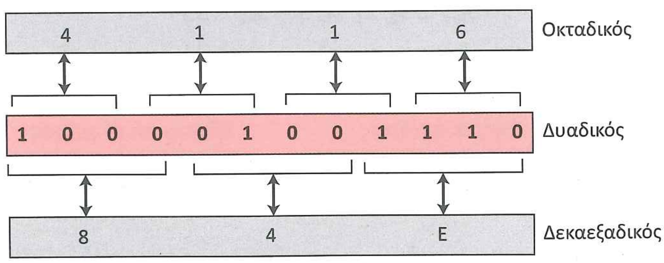
Λύση

Για κάθε οκταδικό ψηφίο γράφουμε το ισοδύναμο σχήμα bit, οπότε προκύπτει $(010100)_2$.

Μετατροπή από το οκταδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα

Εύκολη είναι και η μετατροπή ενός αριθμού από το οκταδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα και το αντίστροφο. Για τη μετατροπή αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί το δυαδικό ως ενδιάμεσο σύστημα. Στην Εικόνα 2.12 μπορείτε να δείτε ένα παράδειγμα.

Εικόνα 2.12 *Μετατροπή από το οκταδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα και αντίστροφα*



Εξηγούμε τη διαδικασία:

- Για τη μετατροπή ενός αριθμού από το οκταδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα, πρέπει πρώτα να μετατρέψουμε τον οκταδικό αριθμό σε δυαδικό. Έπειτα χωρίζουμε τα bit σε ομάδες των τεσσάρων για να βρούμε το δεκαεξαδικό ισοδύναμο.
- Για τη μετατροπή ενός αριθμού από το δεκαεξαδικό στο οκταδικό σύστημα, πρέπει πρώτα να μετατρέψουμε τον δεκαεξαδικό αριθμό σε δυαδικό. Στη συνέχεια χωρίζουμε τα bit σε ομάδες των τριών για να βρούμε το οκταδικό ισοδύναμο.

Πλήθος ψηφίων

Για τη μετατροπή ενός αριθμού από μία βάση σε μια άλλη, συχνά πρέπει να γνωρίζουμε το ελάχιστο πλήθος των ψηφίων που απαιτούνται στο σύστημα προορισμού εφόσον γνωρίζουμε το μέγιστο πλήθος ψηφίων στο σύστημα προέλευσης. Για παράδειγμα, όταν ξέρουμε ότι στο σύστημα προέλευσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το πολύ έξι δεκαδικά ψηφία, θα πρέπει να γνωρίζουμε το ελάχιστο πλήθος δυαδικών ψηφίων που χρειαζόμαστε στο σύστημα προορισμού. Γενικά, ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε k ψηφία σε ένα σύστημα με βάση b_1. Ο μέγιστος αριθμός που μπορούμε να αναπαραστήσουμε στο σύστημα προέλευσης είναι $b_1^k - 1$. Παράλληλα, ο μέγιστος αριθμός που μπορούμε να έχουμε στο σύστημα προορισμού είναι $b_2^x - 1$. Επομένως, $b_2^x - 1 \geq b_1^k - 1$. Αυτό σημαίνει ότι $b_2^x \geq b_1^k$, που με τη σειρά του σημαίνει:

$$x \geq k \times (\log b_1 / \log b_2) \qquad \text{ή} \qquad x = \lceil k \times (\log b_1 / \log b_2) \rceil$$

Παράδειγμα 2.23

Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος δυαδικών ψηφίων που απαιτούνται για την αποθήκευση δεκαδικών ακεραίων με μέγιστο έξι ψηφία.

Λύση

$k = 6$, $b_1 = 10$, και $b_2 = 2$. Επομένως $x = \lceil k \times (\log b_1 / \log b_2) \rceil = \lceil 6 \times (1 / 0{,}30103) \rceil = 20$. Ο μεγαλύτερος δεκαδικός αριθμός με έξι ψηφία είναι 999.999, ενώ ο μεγαλύτερος δυαδικός αριθμός 20 bit είναι 1.048.575. Ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν αριθμό 19 bit είναι 524.287, το οποίο είναι μικρότερο του 999.999. Επομένως χρειαζόμαστε οπωσδήποτε 20 bit.

2.3 ΜΗ ΘΕΣΙΑΚΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Αν και τα μη θεσιακά αριθμητικά συστήματα δεν χρησιμοποιούνται στους υπολογιστές, εδώ παραθέτουμε μια σύντομη περιγραφή τους για λόγους σύγκρισης με τα θεσιακά αριθμητικά συστήματα. Σε ένα **μη θεσιακό αριθμητικό σύστημα** χρησιμοποιείται περιορισμένο πλήθος συμβόλων, το καθένα από τα οποία έχει μια τιμή. Ωστόσο, η θέση που καταλαμβάνει ένα σύμβολο σε έναν αριθμό συνήθως δεν έχει σχέση με την τιμή του αφού η τιμή κάθε συμβόλου είναι σταθερή. Για να βρούμε την τιμή ενός αριθμού, προσθέτουμε τις τιμές όλων των εμφανιζόμενων συμβόλων. Σε αυτό το σύστημα, ένας αριθμός αναπαρίσταται ως εξής:

$$S_{k-1} \ldots S_2, S_1, S_0, S_{-1}, S_{-2} \ldots S_{-l}$$

και έχει την τιμή:

$$n = \pm \underbrace{S_{k-1} + \ldots + S_1 + S_0}_{\text{Ακέραιο μέρος}} + \underbrace{S_{-1} + S_{-2} + \ldots + S_{-l}}_{\text{Κλασματικό μέρος}}$$

Υπάρχουν ορισμένες εξαιρέσεις στον κανόνα της πρόσθεσης που μόλις αναφέραμε, όπως θα δούμε στο Παράδειγμα 2.24.

Παράδειγμα 2.24

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μη θεσιακού αριθμητικού συστήματος είναι οι **λατινικοί αριθμοί**. Το σύστημα αυτό επινοήθηκε από τους Ρωμαίους και χρησιμοποιούνταν στην Ευρώπη μέχρι τον δέκατο έκτο αιώνα. Ωστόσο, εξακολουθεί να χρησιμοποιείται και σήμερα σε αθλητικές διοργανώσεις, σε ενδείξεις ρολογιών, και σε άλλες εφαρμογές. Αυτό το σύστημα αριθμών διαθέτει το σύνολο συμβόλων S = {I, V, X, L, C, D, M}. Η τιμή κάθε συμβόλου παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.3.

Πίνακας 2.3 Τιμές συμβόλων στο λατινικό σύστημα

Σύμβολο	I	V	X	L	C	D	M
Τιμή	1	5	10	50	100	500	1000

Για να βρούμε την τιμή ενός αριθμού, προσθέτουμε τις τιμές των συμβόλων ακολουθώντας συγκεκριμένους κανόνες:

1. Όταν ένα σύμβολο με μικρότερη τιμή βρίσκεται μετά από ένα σύμβολο με ίση ή μεγαλύτερη τιμή, οι τιμές προστίθενται.
2. Όταν ένα σύμβολο με μικρότερη τιμή βρίσκεται πριν από ένα σύμβολο με μεγαλύτερη τιμή, η μικρότερη τιμή αφαιρείται από τη μεγαλύτερη.
3. Ένα σύμβολο S_1 δεν μπορεί να προηγείται ενός άλλου συμβόλου S_2 όταν $S_1 \leq 10 \times S_2$. Για παράδειγμα, το I ή V δεν μπορεί να βρίσκεται πριν από το C.
4. Στους μεγάλους αριθμούς, τοποθετείται μια παύλα επάνω από κάποιο από τα έξι σύμβολα (εκτός από το I), η οποία υποδηλώνει πολλαπλασιασμό με το 1000. Για παράδειγμα, $\overline{\mathrm{V}}$ = 5.000 και $\overline{\mathrm{M}}$ = 1.000.000.
5. Παρόλο που οι Ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν τη λέξη **nulla** (τίποτα) για να εκφράζουν την έννοια του μηδέν, το λατινικό σύστημα αριθμών δεν περιλαμβάνει κάποιο σύμβολο για το ψηφίο μηδέν.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένοι λατινικοί αριθμοί με τις τιμές τους.

III	→	1 + 1 + 1	=	3
IV	→	5 − 1	=	4
VIII	→	5 + 1 + 1 + 1	=	8
XVIII	→	10 + 5 + 1 + 1 + 1	=	18
XIX	→	10 + (10 −1)	=	19
LXXII	→	50 + 10 + 10 + 1 + 1	=	72
CI	→	100 + 1	=	101
MMVII	→	1000 + 1000 + 5 + 1 + 1	=	2007
MDC	→	1000 + 500 + 100	=	1600

2.4 ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

2.4.1 Προτεινόμενα βιβλία

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα θέματα που περιγράφονται σε αυτό το κεφάλαιο σας προτείνουμε τα παρακάτω βιβλία:

- Stallings, W. *Computer Organization and Architecture,* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000
- Mano, M. *Computer System Architecture,* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1993
- Null, L. και Lobur, J. *Computer Organization and Architecture,* Sudbury, MA: Jones and Bartlett, 2003
- Brown, S. και Vranesic, Z. *Fundamentals of Digital Logic with Verilog Design,* New York: McGraw-Hill, 2003

2.4.2 Βασικοί όροι

2.4.3 Περίληψη

- Αριθμητικό σύστημα (ή σύστημα αριθμών) είναι ένα σύστημα που χρησιμοποιεί διακεκριμένα σύμβολα για την αναπαράσταση αριθμών. Στα θεσιακά αριθμητικά συστήματα, η θέση που καταλαμβάνει ένα σύμβολο σε έναν αριθμό καθορίζει την τιμή που αντιπροσωπεύει. Κάθε θέση σχετίζεται με κάποια τιμή θέσης. Στα μη θεσιακά αριθμητικά συστήματα χρησιμοποιείται περιορισμένο πλήθος συμβόλων, καθένα από τα οποία έχει μια τιμή. Ωστόσο, η θέση που καταλαμβάνει ένα σύμβολο σε έναν αριθμό συνήθως δεν έχει σχέση με την τιμή του αφού η τιμή κάθε συμβόλου είναι σταθερή.
- Το δεκαδικό σύστημα έχει ως βάση το 10 ($b = 10$) και χρησιμοποιεί δέκα σύμβολα για την αναπαράσταση των αριθμών. Τα σύμβολα αυτού του συστήματος συχνά αναφέρονται ως **δεκαδικά ψηφία** ή απλώς **ψηφία**. Το δυαδικό σύστημα έχει ως βάση το 2 ($b = 2$) και χρησιμοποιεί μόνο δύο σύμβολα για την αναπαράσταση των αριθμών. Τα σύμβολα αυτού του συστήματος συχνά αναφέρονται ως **δυαδικά ψηφία** ή απλώς **bit**. Το δεκαεξαδικό σύστημα έχει ως βάση το 16 ($b = 16$) και χρησιμοποιεί δεκαέξι σύμβολα για την αναπαράσταση των αριθμών. Τα σύμβολα αυτού του συστήματος συχνά αναφέρονται ως **δεκαεξαδικά ψηφία**. Το οκταδικό σύστημα έχει ως βάση το 8 ($b = 8$) και χρησιμοποιεί οκτώ σύμβολα για την αναπαράσταση των αριθμών. Τα σύμβολα αυτού του συστήματος συχνά αναφέρονται ως οκταδικά ψηφία.
- Μπορούμε να μετατρέψουμε έναν αριθμό από οποιαδήποτε σύστημα στο δεκαδικό. Κάνουμε τη μετατροπή πολλαπλασιάζοντας κάθε ψηφίο με την τιμή θέσης του στο σύστημα προέλευσης και προσθέτοντας κατόπιν τα αποτελέσματα για να υπολογίσουμε τον αριθμό στο δεκαδικό σύστημα. Ένας δεκαδικός αριθμός μπορεί να μετατραπεί στον ισοδύναμό του σε οποιαδήποτε βάση με τη χρήση δύο διαφορετικών διαδικασιών, μία για το ακέραιο μέρος και μία για το κλασματικό. Για τη μετατροπή του ακέραιου μέρους απαιτούνται επανειλημμένες διαιρέσεις και για τη μετατροπή του κλασματικού μέρους απαιτούνται επανειλημμένοι πολλαπλασιασμοί.
- Η μετατροπή αριθμών από το δυαδικό σύστημα στο δεκαεξαδικό και από το δεκαεξαδικό στο δυαδικό είναι πολύ εύκολη αφού τέσσερα bit στο δυαδικό σύστημα αναπαρίστανται ως ένα ψηφίο στο δεκαεξαδικό σύστημα.
- Η μετατροπή αριθμών από το δυαδικό σύστημα στο οκταδικό και από το οκταδικό στο δυαδικό είναι πολύ εύκολη αφού τρία bit στο δυαδικό σύστημα αναπαρίστανται ως ένα ψηφίο στο οκταδικό σύστημα.

2.5 ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

2.5.1 Ερωτήσεις γνώσεων

Γ2-1. Η βάση του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος είναι το ____.

α. 2 γ. 10
β. 8 δ. 16

Γ2-2. Η βάση του δυαδικού αριθμητικού συστήματος είναι το ____.

α. 2 γ. 10
β. 8 δ. 16

Γ2-3. Η βάση του οκταδικού αριθμητικού συστήματος είναι το ____.

α. 2 γ. 10
β. 8 δ. 16

Γ2-4. Η βάση του δεκαεξαδικού αριθμητικού συστήματος είναι το ____.

α. 2 γ. 10
β. 8 δ. 16

Γ2-5. Για τη μετατροπή ενός δεκαδικού ακεραίου στη βάση *b*, _____ επανειλημμένα με το *b*.

α. διαιρούμε γ. προσθέτουμε
β. πολλαπλασιάζουμε δ. αφαιρούμε

Γ2-6. Για τη μετατροπή ενός δεκαδικού κλάσματος στη βάση *b*, _____ συνεχώς με το *b*.

α. διαιρούμε γ. προσθέτουμε
β. πολλαπλασιάζουμε δ. αφαιρούμε

Γ2-7. Ποια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις είναι λανθασμένη;

α. $(10111)_2$ γ. $(3AB)_{16}$
β. $(349)_8$ δ. 256

Γ2-8. Ποια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις είναι λανθασμένη;

α. $(10211)_2$ γ. $(EEE)_{16}$
β. $(342)_8$ δ. 145

Γ2-9. Ποια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις είναι λανθασμένη;

α. $(111)_2$ γ. $(EEG)_{16}$
β. $(346)_8$ δ. 221

Γ2-10. Ποια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις είναι λανθασμένη;

α. $(110)_2$ γ. $(EF)_{16}$
β. $(141)_8$ δ. 22A

Γ2-11. Ποιο από τα παρακάτω είναι ισοδύναμο με το 12 στο δεκαδικό σύστημα;

α. $(1110)_2$ γ. $(15)_8$
β. $(C)_{16}$ δ. Κανένα από τα παραπάνω

Γ2-12. Ποιο από τα παρακάτω είναι ισοδύναμο με το 24 στο δεκαδικό σύστημα;

α. $(11000)_2$ γ. $(31)_8$
β. $(1A)_{16}$ δ. Κανένα από τα παραπάνω

2.5.2 Ερωτήσεις επανάληψης

Ε2-1. Να δώσετε τον ορισμό για το αριθμητικό σύστημα.

Ε2-2. Να αναφέρετε τις διαφορές μεταξύ θεσιακών και μη θεσιακών αριθμητικών συστημάτων.

Ε2-3. Να δώσετε τον ορισμό για τη βάση (base ή radix) ενός θεσιακού αριθμητικού συστήματος. Ποια είναι η σχέση μεταξύ της βάσης και του πλήθους των συμβόλων σε ένα θεσιακό αριθμητικό σύστημα;

Ε2-4. Να περιγράψετε το δεκαδικό σύστημα. Γιατί ονομάζεται *δεκαδικό*; Ποια είναι η βάση σε αυτό το σύστημα;

Ε2-5. Να περιγράψετε το δυαδικό σύστημα. Γιατί ονομάζεται *δυαδικό*; Ποια είναι η βάση σε αυτό το σύστημα;

Ε2-6. Να περιγράψετε το οκταδικό σύστημα. Γιατί ονομάζεται *οκταδικό*; Ποια είναι η βάση σε αυτό το σύστημα;

Ε2-7. Να περιγράψετε το δεκαεξαδικό σύστημα. Γιατί ονομάζεται *δεκαεξαδικό*; Ποια είναι η βάση σε αυτό το σύστημα;

Ε2-8. Γιατί είναι εύκολη η μετατροπή αριθμών από το δυαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα και το αντίστροφο;

Ε2-9. Πόσα bit του δυαδικού συστήματος αναπαρίστανται από ένα ψηφίο στο δεκαεξαδικό σύστημα;

Ε2-10. Πόσα bit του δυαδικού συστήματος αναπαρίστανται από ένα ψηφίο στο οκταδικό σύστημα;

2.5.3 Προβλήματα

Π2-1. Να μετατρέψετε τους παρακάτω δυαδικούς αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα χωρίς να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή, παρουσιάζοντας τη διαδικασία:

α. $(01101)_2$ **γ.** $(011110{,}01)_2$

β. $(1011000)_2$ **δ.** $(111111{,}111)_2$

Π2-2. Να μετατρέψετε τους παρακάτω δεκαεξαδικούς αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα χωρίς να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή, παρουσιάζοντας τη διαδικασία:

α. $(AB2)_{16}$ **γ.** $(ABB)_{16}$

β. $(123)_{16}$ **δ.** $(35E{,}E1)_{16}$

Π2-3. Να μετατρέψετε τους παρακάτω οκταδικούς αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα χωρίς να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή, παρουσιάζοντας τη διαδικασία:

α. $(237)_8$ **γ.** $(617{,}7)_8$

β. $(2731)_8$ **δ.** $(21{,}11)_8$

Π2-4. Να μετατρέψετε τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς στο δυαδικό σύστημα χωρίς να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή, παρουσιάζοντας τη διαδικασία:

α. 1234 **γ.** 124,02

β. 88 **δ.** 14,56

Π2-5. Να μετατρέψετε τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς στο οκταδικό σύστημα χωρίς να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή, παρουσιάζοντας τη διαδικασία:

α. 1156 **γ.** 11,4

β. 99 **δ.** 72,8

Π2-6. Να μετατρέψετε τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς στο δεκαεξαδικό σύστημα χωρίς να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή, παρουσιάζοντας τη διαδικασία:

α. 567
β. 1411
γ. 12,13
δ. 16

Π2-7. Να μετατρέψετε τους παρακάτω οκταδικούς αριθμούς στο δεκαεξαδικό σύστημα χωρίς να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή, παρουσιάζοντας τη διαδικασία:

α. $(514)_8$
β. $(411)_8$
γ. $(13,7)_8$
δ. $(1256)_8$

Π2-8. Να μετατρέψετε τους παρακάτω δεκαεξαδικούς αριθμούς στο οκταδικό σύστημα χωρίς να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή, παρουσιάζοντας τη διαδικασία:

α. $(51A)_{16}$
β. $(4E1)_{16}$
γ. $(BB,C)_{16}$
δ. $(ABC,D)_{16}$

Π2-9. Να μετατρέψετε τους παρακάτω δυαδικούς αριθμούς στο οκταδικό σύστημα χωρίς να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή, παρουσιάζοντας τη διαδικασία:

α. $(01101)_2$
β. $(1011000)_2$
γ. $(011110,01)_2$
δ. $(111111,111)_2$

Π2-10. Να μετατρέψετε τους παρακάτω δυαδικούς αριθμούς στο δεκαεξαδικό σύστημα χωρίς να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή, παρουσιάζοντας τη διαδικασία:

α. $(01101)_2$
β. $(1011000)_2$
γ. $(011110,01)_2$
δ. $(111111,111)_2$

Π2-11. Να μετατρέψετε τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς στο δυαδικό σύστημα χρησιμοποιώντας την εναλλακτική μέθοδο του Παραδείγματος 2.17, παρουσιάζοντας τη διαδικασία:

α. 121
β. 78
γ. 255
δ. 214

Π2-12. Να μετατρέψετε τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς στο δυαδικό σύστημα χρησιμοποιώντας την εναλλακτική μέθοδο του Παραδείγματος 2.18, παρουσιάζοντας τη διαδικασία:

α. $3\ {}^{5}/_{8}$
β. $12\ {}^{3}/_{32}$
γ. $4\ {}^{13}/_{64}$
δ. $12\ {}^{5}/_{128}$

Π2-13. Σε ένα θεσιακό αριθμητικό σύστημα με βάση *b*, ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός που μπορεί να αναπαρασταθεί με *k* ψηφία είναι $b^k - 1$. Να βρείτε τον μεγαλύτερο αριθμό σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα με *έξι* ψηφία:

α. Δυαδικό
β. Δεκαδικό
γ. Δεκαεξαδικό
δ. Οκταδικό

Π2-14. Χωρίς να πραγματοποιήσετε μετατροπή, να βρείτε το ελάχιστο πλήθος ψηφίων που απαιτούνται στο σύστημα προορισμού για καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Μετατροπή πενταψήφιου δεκαδικού αριθμού στο δυαδικό σύστημα.
β. Μετατροπή τετραψήφιου δεκαδικού αριθμού στο οκταδικό σύστημα.
γ. Μετατροπή επταψήφιου δεκαδικού αριθμού στο δεκαεξαδικό σύστημα.

Π2-15. Χωρίς να πραγματοποιήσετε μετατροπή, να βρείτε το ελάχιστο πλήθος ψηφίων που απαιτούνται στο σύστημα προορισμού για καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Μετατροπή δυαδικού αριθμού 5 bit στο δεκαδικό σύστημα.

β. Μετατροπή τριψήφιου οκταδικού αριθμού στο δεκαδικό σύστημα.

γ. Μετατροπή τριψήφιου δεκαεξαδικού αριθμού στο δεκαδικό σύστημα.

Π2-16. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να ξαναγράψουμε ένα κλάσμα ώστε ο παρονομαστής να είναι δύναμη του δύο (1, 4, 8, 16, κ.ο.κ.).

Αρχικό	Νέο	Αρχικό	Νέο
0,5	$^1/_2$	0,25	$^1/_4$
0,125	$^1/_8$	0,0625	$^1/_{16}$
0,03125	$^1/_{32}$	0,015625	$^1/_{64}$

Ωστόσο, ορισμένες φορές απαιτείται συνδυασμός καταχωρίσεων για τη δημιουργία του σωστού κλάσματος. Για παράδειγμα, το 0,625 –που δεν περιλαμβάνεται στον πίνακα– ισούται με 0,5 + 0,125. Αυτό σημαίνει ότι το 0,625 μπορεί να γραφεί ως 1/2 + 1/8, ή ως 5/8.

Να μετατρέψετε τα παρακάτω δεκαδικά κλάσματα σε κλάσματα με δυνάμεις του 2:

α. 0,1875

β. 0,640625

γ. 0,40625

δ. 0,375

Π2-17. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από το προηγούμενο πρόβλημα, να μετατρέψετε τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς σε δυαδικούς:

α. 7,1875

β. 12,640625

γ. 11,40625

δ. 0,375

Π2-18. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή ακεραίου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. $b = 10, k = 10$

β. $b = 2, k = 12$

γ. $b = 8, k = 8$

δ. $b = 16, k = 7$

Π2-19. Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος των bit που απαιτούνται για την αποθήκευση των παρακάτω ακεραίων:

α. μικρότερο από 1000

β. μικρότερο από 100.000

γ. μικρότερο από 64

δ. μικρότερο από 256

Π2-20. Ένας αριθμός μικρότερος από b^k μπορεί να αναπαρασταθεί με k ψηφία στη βάση b. Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων που απαιτούνται σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Ακέραιοι μικρότεροι από 2^{14} στο δυαδικό σύστημα

β. Ακέραιοι μικρότεροι από 10^8 στο δεκαδικό σύστημα

γ. Ακέραιοι μικρότεροι από 8^{13} στο οκταδικό σύστημα

δ. Ακέραιοι μικρότεροι από 16^4 στο δεκαεξαδικό σύστημα

Π2-21. Μια συνηθισμένη βάση που χρησιμοποιείται στο Διαδίκτυο είναι το $b = 256$. Σε αυτό το σύστημα χρειαζόμαστε 256 σύμβολα για την αναπαράσταση ενός αριθμού. Αντί να δημιουργήσουν ένα τόσο μεγάλο πλήθος συμβόλων, οι σχεδιαστές αυτού του συστήματος χρησιμοποίησαν αριθμούς του δεκαδικού συστήματος για την αναπαράσταση συμβόλων: από το 0 έως το 255. Με άλλα λόγια, το σύνολο των συμβόλων είναι $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 255\}$. Κάθε αριθμός σε αυτό το σύστημα έχει πάντα τη μορφή $S_1.S_2.S_3.S_4$, δηλαδή τέσσερα σύμβολα που διαχωρίζονται με τρεις τελείες. Το σύστημα αυτό χρησιμοποιείται για τον ορισμό διευθύνσεων Διαδικτύου (δείτε το Κεφάλαιο 6). Ένα παράδειγμα διεύθυνσης σε αυτό το σύστημα είναι 10.200.14.72, το οποίο είναι ισοδύναμο με $10 \times 256^3 + 200 \times 256^2 + 14 \times 256^1 + 72 \times 256^0 = 180.883.016$ στο δεκαδικό σύστημα. Αυτό το σύστημα αρίθμησης ονομάζεται *δεκαδικός συμβολισμός με τελείες* (dotted decimal notation). Να βρείτε τη δεκαδική τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω διευθύνσεις Διαδικτύου:

α. 17.234.34.14
β. 14.56.234.56
γ. 110.14.56.78
δ. 24.56.13.11

Π2-22. Οι διευθύνσεις Διαδικτύου του προηγούμενου προβλήματος μπορούν επίσης να αναπαρασταθούν ως σχήματα bit. Σε αυτή την περίπτωση, για την αναπαράσταση μιας διεύθυνσης χρησιμοποιούνται 32 bit, δηλαδή οκτώ bit για κάθε σύμβολο στον δεκαδικό συμβολισμό με τελείες. Για παράδειγμα, η διεύθυνση 10.200.14.72 μπορεί επίσης να αναπαρασταθεί ως 00001010 11001000 00001110 01001000. Να γράψετε τις παρακάτω διευθύνσεις Διαδικτύου με αναπαράσταση bit:

α. 17.234.34.14
β. 14.56.234.56
γ. 110.14.56.78
δ. 24.56.13.11

Π2-23. Να γράψετε τα δεκαδικά ισοδύναμα των παρακάτω λατινικών αριθμών:

α. XV
β. XXVII
γ. VLIII
δ. MCLVII

Π2-24. Να μετατρέψετε τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς σε λατινικούς:

α. 17
β. 38
γ. 82
δ. 999

Π2-25. Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω λατινικούς αριθμούς δεν είναι έγκυροι:

α. MMIM
β. MIC
γ. CVC
δ. VX

Π2-26. Οι Μάγια επινόησαν ένα θεσιακό εικοσαδικό αριθμητικό σύστημα (δηλαδή σύστημα με βάση το 20), το οποίο ονομάστηκε *αριθμητικό σύστημα των Μάγια*. Ως βάση αυτού του συστήματος επέλεξαν το 20 πιθανότατα επειδή χρησιμοποιούσαν τα δάχτυλα και των χεριών και των ποδιών τους για να μετρούν. Το σύστημα αυτό περιλαμβάνει 20 σύμβολα τα οποία δημιουργούνται από τρία απλούστερα σύμβολα. Το προηγμένο χαρακτηριστικό αυτού του συστήματος είναι ότι διαθέτει και ένα σύμβολο για το μηδέν, το κοχύλι. Τα άλλα δύο σύμβολα είναι ένας κύκλος (ή βότσαλο) για τη μονάδα και μια οριζόντια γραμμή (ή ραβδί) για το πέντε. Για την αναπαράσταση αριθμών μεγαλύτερων από το δεκαεννιά, οι αριθμοί γράφονται κατακόρυφα. Να πραγματοποιήσετε έρευνα στο Διαδίκτυο για να απαντήσετε στο εξής: Πώς αναπαρίστανται οι δεκαδικοί αριθμοί 12, 123, 452, και 1256 στο αριθμητικό σύστημα των Μάγια;

Π2-27. Η ανάπτυξη του πρώτου θεσιακού αριθμητικού συστήματος αποδίδεται στους Βαβυλώνιους. Το σύστημα αυτό ονομάστηκε *αριθμητικό σύστημα των Βαβυλωνίων*. Οι Βαβυλώνιοι πήραν το αριθμητικό σύστημα των Σουμέριων και των Ακκάδιων και το ανέπτυξαν σε ένα θεσιακό εξηνταδικό σύστημα (δηλαδή σύστημα με βάση το 60). Η βάση αυτή εξακολουθεί να χρησιμοποιείται και σήμερα για τη μέτρηση ωρών και γωνιών. Για παράδειγμα, μία ώρα είναι 60 λεπτά και ένα λεπτό είναι 60 δευτερόλεπτα· αντίστοιχα, μία μοίρα είναι 60 πρώτα λεπτά και ένα πρώτο λεπτό είναι 60 δεύτερα λεπτά. Από τη στιγμή που σε ένα θεσιακό σύστημα με βάση b απαιτούνται b σύμβολα (ψηφία), το λογικό θα ήταν σε ένα εξηνταδικό θεσιακό σύστημα να απαιτούνται 60 σύμβολα. Ωστόσο, οι Βαβυλώνιοι δεν χρησιμοποιούσαν κάποιο σύμβολο για το μηδέν, ενώ τα άλλα 59 σύμβολα δημιουργούνταν με τον συνδυασμό δύο συμβόλων, αυτών που αναπαρίσταναν το ένα και το δέκα. Να πραγματοποιήσετε έρευνα στο Διαδίκτυο για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

α. Να αναπαραστήσετε τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς στο Βαβυλώνιο σύστημα: 11291, 3646, 3582.

β. Να αναφέρετε τα προβλήματα που μπορεί να προκύψουν από την έλλειψη συμβόλου για το 0. Να βρείτε πληροφορίες για το πώς αντιμετωπίζεται αυτό το πρόβλημα στο Βαβυλώνιο σύστημα αριθμών.